Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
1. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 13.04.2011

Aufgabe 1.1: Wir betrachten in dieser Aufgabe Linksmoduln über einem Ring R. Sei

$$0 \to L \to M \to N \to 0$$

eine kurze exakte Folge von R-Moduln und sei Q ein R-Modul.

(i) Zeige: Die Folge

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(Q, L) \to \mathrm{Hom}_R(Q, M) \to \mathrm{Hom}_R(Q, N)$$

abelscher Gruppen ist exakt. (Man sagt: Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(Q, -)$ ist *linksexakt*.)

(ii) Zeige durch ein Beispiel, dass der Funktor $\mathrm{Hom}_R(Q, -)$ im allgemeinen nicht *exakt* ist, also

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(Q, L) \to \mathrm{Hom}_R(Q, M) \to \mathrm{Hom}_R(Q, N) \to 0$$

nicht notwendig eine exakte Folge ist.

Aufgabe 1.2: Sei R ein Ring und sei P ein R-(Links-)Modul. Zeige, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind.

(i) Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ ist exakt, d.h. er bildet kurze exakte Folgen von R-Moduln auf kurze exakte Folgen abelscher Gruppen ab.

(ii) Sind $f\colon P \to N$ und $p\colon M \to N$ zwei R-Modulabbildungen und ist p surjektiv, so existiert eine R-Modulabbildung $g\colon P \to M$ mit $pg = f$.

(iii) Jede surjektive R-Modulabbildung $f\colon M \to P$ hat einen Schnitt, d.h. es gibt eine R-Modulabbildung $s\colon P \to M$ mit $fs = \mathrm{id}_P$.

(iv) P ist direkter Summand eines freien R-Moduls, d.h. es gibt einen R-Modul Q so dass die direkte Summe $P \oplus Q$ ein freier Modul ist.

Ein Modul P heißt *projektiv* wenn er diese äquivalenten Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 1.3: (Das Fundamentallemma der homologischen Algebra)
Zunächst einige Begriffe aus der homologischen Algebra: Eine exakte Folge von R-Moduln

$$\cdots \to P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

in der alle P_i projektiv sind heißt *projektive Auflösung* von M. Die (P_i, d_i) bilden einen Kettenkomplex P_*, die Abbildung ε heißt *Augmentation.* Wir schreiben oft (P_*, M) für die projektive Auflösung. Ein Morphismus von Auflösungen $(P_*, M) \to (Q_*, N)$ über einer R-Modulabbildung $f\colon M \to N$ ist eine Kettenabbildung $\widetilde{f}\colon P_* \to Q_*$ mit $\varepsilon \widetilde{f}_0 = f\varepsilon$.

Zeige nun:

(i) Jeder R-Modul M besitzt eine projektive Auflösung.

(ii) Wenn (P_*, M) und (Q_*, N) projektive Auflösungen sind und $f\colon M \to N$ eine R-Modulabbildung ist, dann existiert eine Abbildung von Kettenkomplexen $\widetilde{f}$ über f.

(iii) Sind $\widetilde{f}_1\colon P_* \to Q_*$ und $\widetilde{f}_2\colon P_* \to Q_*$ zwei Kettenabbildungen über $f\colon M \to N$, so sind $\widetilde{f}_1$ und $\widetilde{f}_2$ kettenhomotop.

Aufgabe 1.4: Sei R ein Ring und $f : C \to D$ ein Quasi-Isomorphismus von $\mathbb{N}$-graduierten Kettenkomplexen von R-Moduln. Mit anderen Worten, f ist ein Homomorphismus von R-Modul-Kettenkomplexen, der Isomorphismen $H_n(f) : H_n(C) \to H_n(D)$ in allen Homologiemoduln induziert. In dieser Aufgabe zeigen wir folgendes: Wenn die Komplexe C und D aus projektiven R-Moduln bestehen, dann ist f sogar eine Ketten-Homotopieäquivalenz.

(i) Der *Abbildungszylinder* einer (R-Modul-) Kettenabbildung $f : C \to D$ ist der R-Modul-Kettenkomplex $Z(f)$ gegeben durch

$$Z(f)_n = D_n \oplus C_{n-1} \oplus C_n, \quad d(x, y, z) = (dx - f_{n-1}(y), -dy, y + dz).$$

Zeige, dass die Inklusion $D \to Z(f)$ eine Ketten-Homotopieäquivalenz ist. Zeige weiter, dass $f : C \to D$ genau dann eine Ketten-Homotopieäquivalenz ist, wenn die Inklusion $C \to Z(f)$ eine solche ist.

(ii) Sei $f : C \to D$ ein Quasi-Isomorphismus zwischen Kettenkomplexen von projektiven R-Moduln mit folgender besonderen Eigenschaft: Für jedes $n \geq 0$ ist $f_n : C_n \to D_n$ injektiv und spaltet (d.h. es gibt eine R-lineare Abbildung $\varphi : D_n \to C_n$ mit $\varphi f_n = \mathrm{Id}$). Zeige, dass es eine Kettenabbildung $g : D \to C$ mit $gf = \mathrm{Id}_C$ und eine Ketten-Homotopie von fg zur Identität von D gibt. Insbesondere ist also f eine Ketten-Homotopieäquivalenz.

(iii) Sei jetzt $f : C \to D$ ein Quasi-Isomorphismus zwischen Kettenkomplexen von projektiven R-Moduln, der nicht notwendig injektiv ist. Benutze (i) und (ii) um zu zeigen, dass f eine Ketten-Homotopieäquivalenz ist.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
2. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 20.04.2011

Aufgabe 2.1: Die Bezeichnung *Ext*-Gruppen stammt von 'extension' (Erweiterung). In dieser Übung wollen wir den Zusammenhang zwischen der Gruppe $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ und den Erweiterungen von R-Moduln verstehen.

Sei R ein Ring, nicht notwendig kommutativ und seien M und N linke R-Moduln. Eine *Erweiterung* von M durch N ist eine kurze exakte Folge von R-Moduln

$$0 \to N \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} M \to 0 \ .$$

Die Erweiterung (E, i, p) heißt *äquivalent* zu einer Erweiterung (E', i', p'), wenn es eine R-lineare Abbildung $\varphi : E \to E'$ mit $\varphi \circ i = i'$ und $p' \circ \varphi = p$ gibt.

(i) Zeige, dass Äquivalenz von Erweiterungen tatsächlich eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Sei

$$P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$$

der Beginn (oder besser das Ende?) einer projektiven Auflösung von M als R-Modul. Für einen Homomorphismus $f : P_1 \to N$ von R-Moduln betrachten wir die Folge

$$E(f) \ : \qquad 0 \to N \xrightarrow{i} (N \oplus P_0)/V \xrightarrow{p} M \to 0 \quad .$$

Hierbei ist V der Untermodul von $N \oplus P_0$ bestehend aus den Elementen $(f(z), -d_1(z))$ für alle $z \in P_1$, und die Abbildungen sind gegeben durch

$$i(x) = (x, 0) + V \quad \text{und} \quad p\left((x, y) + V\right) = \varepsilon(y) \ .$$

Zeige, dass diese Folge $E(f)$ von R-Moduln genau dann exakt ist, wenn $f \circ d_2 = 0$ gilt, wenn also f ein Kozykel im Kokettenkomplex $\mathrm{Hom}_R(P_*, N)$ ist.

(iii) Sei wieder $f : P_1 \to N$ ein Homomorphismus von R-Moduln mit der Kozykel-Eigenschaft $f \circ d_2 = 0$. Sei $g : P_0 \to N$ ein beliebiger R-Homomorphismus, so dass f und $f + d(g) = f + g \circ d_1$ kohomolog im Kokettenkomplex $\mathrm{Hom}_R(P_*, N)$ sind. Zeige, dass die Erweiterungen $E(f)$ und $E(f + d(g))$ äquivalent sind.

(iv) Nach Teil (ii) und (iii) liefert die Zuordnung $[f : P_1 \to N] \mapsto E(f)$ eine wohldefinierte Abbildung von der Gruppe $\mathrm{Ext}^1_R(M, N) = H^1(\mathrm{Hom}_R(P_*, N))$ in die Menge der Äquivalenzklassen von Erweiterungen von M durch N. Zeige, dass dies eine Bijektion ist; mit anderen Worten: Die Gruppe $\mathrm{Ext}^1_R(M, N)$ klassifziert alle R-Modul-Erweiterungen von M durch N bis auf Äquivalenz.

(v) Berechne die Gruppe $\mathrm{Ext}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$. Wie sehen die den Elementen entsprechenden Erweiterungen von $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ durch $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ aus?

Aufgabe 2.2: Sei $R = \mathbb{Z}[t]$ der Polynomring über den ganzen Zahlen in einer Variable t. Es seien M und N die linken R-Moduln, die beide $\mathbb{Z}/2$ als unterliegende abelsche Gruppe haben, jedoch mit Wirkung der Unbestimmten vermöge

$$t \cdot m = 0 \quad \text{für } m \in M \qquad \text{bzw.} \qquad t \cdot n = n \quad \text{für } n \in N.$$

Berechne die Ext-Gruppen $\mathrm{Ext}^n_R(M, M)$, $\mathrm{Ext}^n_R(M, N)$, $\mathrm{Ext}^n_R(N, M)$ und $\mathrm{Ext}^n_R(N, N)$ für alle $n \geq 0$.

Aufgabe 2.3: Berechne die Kohomologiegruppen $H^n(\mathbb{R}P^m, A)$ für alle $n \geq 0$, alle $m \geq 1$ und alle abelschen Gruppen A.

Aufgabe 2.4: (Zelluläre Kohomologie) Sei X ein CW-Komplex mit n-Skelett X^n. Der zelluläre *Kokettenkomplex* $\widetilde{C}^*(X)$ ist in Grad n definiert als

$$\widetilde{C}^n(X) = H^n(X^n, X^{n-1}),$$

und das Differential $d^n\colon \widetilde{C}^n(X) \to \widetilde{C}^{n+1}(X)$ ist die Komposition

$$H^n(X^n, X^{n-1}) \to H^n(X^n) \to H^{n+1}(X^{n+1}, X^n)$$

der entsprechenden Abbildungen aus den langen exakten Kohomologiefolgen der Raumpaare (X^n, X^{n-1}) und (X^{n+1}, X^n). (In dieser Aufgabe haben alle (singulären) Homologie- und Kohomologiegruppen Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, weshalb wir die Koeffizientengruppe in der Notation weglassen.)

Zeige:

(i) Es gilt $H^k(X^n, X^{n-1}) \cong 0$ für $k \neq n$ und $H^k(X^n) \cong 0$ für $k > n$, und die Inklusion $X^{n+1} \to X$ induziert einen Isomorphismus $H^n(X) \to H^n(X^{n+1})$.

(ii) Die *zelluläre Kohomologie* $H^n(\widetilde{C}^*(X))$ von X ist isomorph zur in der Vorlesung definierten (singulären) Kohomologie $H^*(X)$ von X.

(iii) Der zelluläre Kokettenkomplex $\widetilde{C}^*(X)$ ist isomorph zu $\mathrm{Hom}(\widetilde{C}_*(X), \mathbb{Z})$. Dabei ist $\widetilde{C}_*(X)$ der zelluläre Kettenkomplex, dessen *Homologie* isomorph zur Homologie $H_*(X)$ von X ist.

(iv) Berechne $H^*(\mathbb{C}P^n)$ mit Hilfe der zellulären Kohomologie.

(Hinweis: Benutze die entsprechenden Resultate über zelluläre *Homologie* und die *Universelle Koeffizienten*-Formel.)

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
3. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 27.04.2011

Aufgabe 3.1: Seien X und Y simpliziale Mengen und R ein Ring. Wir definieren das *äußere Produkt*

$$\times \;:\; H^n(X;R) \;\times\; H^m(Y;R) \;\to\; H^{n+m}(X \times Y;R)$$

durch die Vorschrift

$$x \times y \;=\; p_X^*(x) \cup p_Y^*(y) \;,$$

wobei $p_X : X \times Y \to X$ und $p_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionen sind. Zeige:

(i) Das äußere Produkt ist assoziativ, d.h. es gilt

$$(x \times y) \times z \;=\; x \times (y \times z)$$

in $H^{n+m+k}(X \times Y \times Z;R)$ für $x \in H^n(X;R)$, $y \in H^m(Y;R)$ und $z \in H^k(Z;R)$.

(ii) Falls R kommutativ ist, dann ist das äußere Produkt kommutativ in folgendem Sinn: Für $x \in H^n(X;R)$ und $y \in H^m(Y;R)$ gilt

$$y \times x \;=\; (-1)^{nm} \cdot \tau^*(x \times y)$$

in $H^{n+m}(Y \times X;R)$, wobei $\tau : X \times Y \to Y \times X$ der Isomorphismus ist, der die Einträge vertauscht.

(iii) Sind x und y Kohomologieklassen desselben Raumes X (von möglicherweise verschiedenen Dimensionen), so gilt

$$x \cup y \;=\; \Delta^*(x \times y)$$

wobei $\Delta : X \to X \times X$ die Diagonalabbildung ist. Mit anderen Worten: Cup-Produkt und äußeres Produkt bestimmen sich gegenseitig.

Aufgabe 3.2: Wir betrachten die Kettenkomplexe abelscher Gruppen

$$C = (\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}) \text{ und } D = (\cdots \to 0 \to \mathbb{Z} \to 0)$$

und den eindeutig bestimmten Kettenhomorphismus $f \colon C \to D$ mit $f_1 = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$. Zeige, dass $H_0(f)$ und $H_1(f)$ die triviale Abbildung sind, $H^1(f) \colon H^1(\mathrm{Hom}(D,\mathbb{Z})) \to H^1(\mathrm{Hom}(C,\mathbb{Z}))$ jedoch eine nichttriviale Abbildung ist.

Folgere daraus, dass die Spaltung in der universellen Koeffizieten-Formel nicht natürlich sein kann.

Aufgabe 3.3: (Normalisierter Kettenkomplex) Sei X eine simpliziale Menge. Wie früher heißt ein n-Simplex $x \in X_n$ ausgeartet, wenn es im Bild einer Ausartungsabbildung $s_i\colon X_{n-1} \to X_n$ mit $0 \leq i \leq n-1$ liegt.

(i) Sei $D(X)_n$ die freie abelsche Gruppe auf der Menge der ausgearteten n-Simplizes. Zeige, dass die $D(X)_n$ einen Unterkomplex $D(X)$ von $C(X) = C(X;\mathbb{Z})$ bilden.

(ii) Wir definieren nun eine Filtrierung, die zwischen $D(X)$ und dem trivialen Kettenkomplex 0 interpoliert. Sei dazu $(F_pD(X))_n$ die freie abelsche Gruppe auf den ausgearteten n-Simplizes der Form $s_i(y)$ für $0 \leq i < \min(n,p)$ und sei $(F_0D)_n = 0$ für alle n. (Es gilt also $(F_pD(X))_n = D(X)_n$ falls $n \leq p$.) Zeige, dass für festes p die $(F_pD(X))_n$ einen Unterkomplex $F_pD(X)$ von $D(X)$ bilden.

(iii) Per Definition ist $F_{p-1}D(X)$ ein Unterkomplex von $F_pD(X)$. Zeige, dass die Vorschrift $x \mapsto (-1)^{p+1}s_p(x)$ eine Homotopie zwischen der Identität des Quotientenkomplexes $F_pD(X)/F_{p-1}D(X)$ und der trivialen Abbildung induziert und folgere daraus mit Hilfe der langen exakten Folge von Homologiegruppen, dass die Inklusion $F_{p-1}D(X) \to F_pD(X)$ ein Quasiisomorphismus ist.

(iv) Benutzte (ii) und (iii) um zu zeigen, dass $D(X)$ triviale Homologiegruppen in allen Dimensionen hat.

(v) Der *normalisierte* Kettenkomplex einer simplizialen Menge X ist der Quotientenkomplex $N(X) = C(X)/D(X)$. Zeige, dass die Quotientenabbildung $C(X) \to N(X)$ ein Quasiisomorphismus ist.

Man kann also die Homologiegruppen $H_*(C(X))$ einer simplizialen Menge X mit Hilfe des deutlich kleineren normalisierten Kettenkomplexes $N(X)$ berechnen.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
4. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 04.05.2011

Aufgabe 4.1: (Kettenhomotopie als Abbildung auf ‘Produkt mit Intervall’)

(i) Für zwei Kettenkomplexe C und D definiert man das *Tensorprodukt* $C \otimes D$ durch

$$(C \otimes D)_n \;=\; \bigoplus_{p=0}^{n} C_p \otimes D_{n-p}\ ,$$

wobei auf der rechten Seite das Tensorprodukt abelscher Gruppen steht. Das Differential $d : (C \otimes D)_n \to (C \otimes D)_{n-1}$ definiert sich mit Hilfe der Differentiale von C und D durch die Formel

$$d(x \otimes y) \;=\; d(x) \otimes y \;+\; (-1)^p x \otimes d(y) \;\in\; (C_{p-1} \otimes D_{n-p}) \oplus (C_p \otimes D_{n-p-1})$$

für $x \in C_p$ und $y \in D_{n-p}$, und durch lineare Fortsetzung im allgemeinen. Zeige, dass $(C \otimes D, d)$ tatsächlich einen Kettenkomplex bildet.

(ii) Die algebraische Version des Intervalls ist der Kettenkomplex I definiert durch

$$I_n \;=\; \begin{cases} \mathbb{Z}[\underline{0}, \underline{1}] & \text{für } n = 0, \\ \mathbb{Z}[E] & \text{für } n = 1 \text{ und} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das einzige nicht-triviale Differential $d : I_1 \to I_0$ ist gegeben durch $d(E) = \underline{0} - \underline{1}$. Zeige, dass I isomorph zum normalisierten Kettenkomplex $N\mathbb{Z}[\Delta^1]$ (siehe Aufgabe 3.3) des simplizialen 1-Simplexes ist.

(iii) Seien C und D Kettenkomplexe. Für eine Kettenabbildung $H : C \otimes I \to D$ bezeichnen wir mit $H^0 : C \to D$ die ‘Einschränkung auf den Anfangspunkt’, welche für $x \in C_n$ durch die Vorschrift $H^0_n(x) = H_n(x \otimes \underline{0})$ gegeben ist; die ‘Einschränkung auf den Endpunkt’ $H^1 : C \to D$ ist analog definiert. Zeige, dass H^0 und H^1 Kettenabbildungen sind.

(iv) Sei $H : C \otimes I \to D$ eine Kettenabbildung. Zeige, dass dann die Abbildungen $s_n : C_n \to D_{n+1}$ definiert durch

$$s_n(x) \;=\; (-1)^n\, H_{n+1}(x \otimes E)$$

eine Kettenhomotopie von H^0 zu H^1 bilden.

(v) Sei umgekehrt $\{s_n : C_n \to D_{n+1}\}_{n \geq 0}$ eine Kettenhomotopie zwischen zwei Kettenabbildungen $C \to D$. Definiere daraus eine Kettenabbildung $H : C \otimes I \to D$, welche gemäß (iv) die gegebene Kettenhomotopie zurückliefert.

Aufgabe 4.2: Sei X ein Raum, $U, V \subset X$ offene Teilmengen und R ein Ring.

(i) Zeige, dass das Cup-Produkt von Kozykeln eine bilineare Abbildung

$$H^n(X, U; R) \times H^m(X, V; R) \;\to\; H^{n+m}(X, U \cup V; R)$$

in relativer Kohomologie induziert. In welchem Sinne ist dieses Cup-Produkt assoziativ und kommutativ?

(ii) Angenommen, $X = U \cup V$ und U und V sind zusammenziehbar. Zeige mit Hilfe von (i), dass das Cup-Produkt in $H^*(X; R)$ von je zwei Klassen positiver Dimension trivial ist.

(iii) Zeige, dass für jeden Raum X das Cup-Produkt von je zwei Kohomologie-Klassen positiver Dimension in der Einhängung ΣX trivial ist.

Aufgabe 4.3: (Normalisierter Kokettenkomplex) Sei X eine simpliziale Menge, sei A eine abelsche Gruppe, und sei $N(X)$ der in Aufgabe 3.3 eingeführte normalisierte Kettenkomplex von X. Der *normalisierte Kokettenkomplex* von X ist definiert als

$$N^*(X, A) = \operatorname{Hom}(N(X), A).$$

(i) Zeige: Die Quotientenabbildung $C(X) \to N(X)$ induziert einen Quasiisomorphismus $N^*(X, A) \to C^*(X, A) = \operatorname{Hom}(C(X; \mathbb{Z}), A)$.

(ii) Die Menge

$$\{f \colon X_n \to A \mid f(x) = 0 \text{ falls } x \text{ ausgeartet}\}$$

ist eine abelsche Gruppe unter der punktweisen Addition. Zeige, dass $N^n(X, A)$ isomorph zu dieser abelschen Gruppe ist.

(iii) Sei nun R ein Ring. Zeige, dass das Cup Produkt $C^n(X; R) \times C^m(X; R) \xrightarrow{\cup} C^{n+m}(X; R)$ ein Cup-Produkt auf dem normalisierten Kokettenkomplex $N^*(X; R)$ induziert und folgere dass die aus (i) resultierenden Abildungen $H^n(N^*(X; R)) \to H^n(C^*(X; R))$ einen Isomorphismus von graduierten Ringen bilden.

Aufgabe 4.4: Wir bezeichnen mit $S^1 = \underline{\Delta}^1 / \partial \underline{\Delta}^1$ den 'simplizialen Kreis'. Zeige, dass die Kohomologiegruppen $H^n(S^1 \times S^1, \mathbb{Z})$ für alle n frei sind, gib eine Basis an und berechne das Cup-Produkt in dieser Basis. (Hinweis: Benutze Aufgabe 4.3.)

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
5. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 11.05.2011

Aufgabe 5.1: Sei M eine n-Mannigfaltigkeit und A eine abelsche Gruppe.

(i) Sei $\alpha \in H_n(M; A)$ eine Homologieklasse der Dimension n. Zeige, dass die Menge aller Punkte x aus M, für die $\rho_x(\alpha) = 0$ in der lokalen Homologiegruppe $H_n(M|x; A)$ gilt, offen und abgeschlossen ist.

(ii) Sei M zusammenhängend und nicht kompakt. Zeige, dass die Gruppe $H_n(M; A)$ trivial ist.

Aufgabe 5.2: Es sei $p : E \to M$ eine Überlagerung zwischen Hausdorff-Räumen mit nicht-leerem Totalraum E.

(i) Zeige, dass E genau dann eine n-Mannigfaltigkeit ist, wenn M eine n-Mannigfaltigkeit ist.

(ii) Es sei M eine orientierbare n-Mannigfaltigkeit. Zeige, dass dann auch E orientierbar ist.

(iii) Zusätzlich zu (ii) sei nun die Blätterzahl k der Überlagerung endlich und M (und damit auch E) kompakt. Es sei μ_M die Fundamentalklasse einer Orientierung von M und μ_E die Fundamentalklasse der induzierten Orientierung von E. Zeige die Beziehung

$$p_*(\mu_E) \;=\; k \cdot \mu_M$$

in der Gruppe $H_n(M; \mathbb{Z})$.

Aufgabe 5.3: Es sei M eine n-Mannigfaltigkeit und G eine Gruppe, die frei und eigentlich diskontinuierlich auf M wirkt und so dass der Quotientenraum M/G Hausdorff'sch ist. Dann ist die Quotientenraumprojektion $p : M \to M/G$ eine Überlagerung und somit der Quotientenraum M/G nach Aufgabe 5.2 ebenfalls eine n-Mannigfaltigkeit. Nun sei M orientierbar und die Wirkung von G sei orientierungserhaltend. Zeige, dass M/G ebenfalls orientierbar ist.

Aufgabe 5.4: Sei M eine n-Mannigfaltigkeit mit $n \geq 2$ und $x \in M$. Zeige, dass M genau dann orientierbar ist, wenn $M - \{x\}$ orientierbar ist.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
6. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 18.05.2011

Aufgabe 6.1: Sei I eine gerichtete partiell geordnete Menge.

(i) Sei A ein I-indiziertes System abelscher Gruppen mit der Eigenschaft, dass für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ die Abbildung $A(i,j) : A_i \to A_j$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass dann für alle $j \in I$ die Abbildung $\kappa_j : A_j \to \mathrm{colim}_I A$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Seien A, B und C drei I-indizierte Systeme abelscher Gruppen und $\{\varphi_i : A_i \to B_i\}_{i \in I}$ und $\{\psi_i : B_i \to C_i\}_{i \in I}$ zwei natürliche Transformationen. Weiter sei für jedes $i \in I$ die Folge

$$A_i \xrightarrow{\varphi_i} B_i \xrightarrow{\psi_i} C_i$$

exakt. Zeige, dass dann auch die Folge

$$\mathrm{colim}_I A \xrightarrow{\mathrm{colim}\varphi_i} \mathrm{colim}_I B \xrightarrow{\mathrm{colim}\psi_i} \mathrm{colim}_I C$$

exakt ist.

(iii) Zeige, dass jede abelsche Gruppe der gerichtete Kolimes ihrer endlich erzeugten Untergruppen ist.

Aufgabe 6.2: Sei X ein topologischer Raum und $\{U_i\}_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von X, die gerichtet ist (d.h. für alle $i, j \in I$ existiert ein $k \in I$ mit $U_i \cup U_j \subseteq U_k$). Zeige, dass für alle $n \geq 0$ und jede Koeffizientengruppe A die von den Inklusionen $U_i \to X$ induzierte Abbildung

$$\mathrm{colim}_{i \in I}\ H_n(U_i; A) \ \to\ H_n(X; A)$$

ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 6.3: Sei X ein Hausdorffraum, $n \geq 1$ und A eine abelsche Gruppe. Konstruiere einen Isomorphismus zwischen den Gruppen

$$H^n_c(X \times \mathbb{R}; A) \quad \text{und} \quad H^{n-1}_c(X; A).$$

Aufgabe 6.4: Sei X ein topologischer Raum und $\alpha\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass α einen Homomorphimsus $H^*(X; R) \to H^*(X; S)$ graduierter Ringe induziert.

Benutze nun den Homomorphismus $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$, Aufgabe 2.4 und die aus der Vorlesung bekannte Berechnung von $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z}/2)$ um den integralen Kohomologiering $H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{Z})$ von $\mathbb{R}P^\infty$ zu berechnen.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
7. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 25.05.2011

Aufgabe 7.1: In dieser Aufgabe zeigen wir, dass *Mayer-Vietoris-Folgen* für beliebige Kohomologietheorien existieren.

(i) Sei

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, "f_i"] & B_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "g_i"] & C_i \arrow[r, "\gamma_i"] \arrow[d, "h_i"] & A_{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i+1}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A'_i \arrow[r, "\alpha'_i"] & B'_i \arrow[r, "\beta'_i"] & C'_i \arrow[r, "\gamma'_i"] & A'_{i+1} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagram abelscher Gruppen und Gruppenhomomorphismen, in dem die Zeilen exakt sind und alle Abbildungen h_i Isomorphismen sind.

Zeige, dass die Folge

$$\cdots \longrightarrow A_i \xrightarrow{(f_i,\alpha_i)} A'_i \oplus B_i \xrightarrow{\alpha'_i \oplus (-g_i)} B'_i \xrightarrow{\gamma_i h_i^{-1} \beta'_i} A_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

exakt ist.

(ii) Sei nun k^* eine Kohomologietheorie und X ein topologischer Raum mit Unterräumen $U \subseteq X$ und $V \subseteq X$, so dass $X = U \cup V$ gilt und die von der Inklusion von Raumpaaren $(U, U \cap V) \to (X, V)$ induzierte Abbildung einen Isomorphismus $k^n(X,V) \to k^n(U, U \cap V)$ relativer Kohomologiegruppen für alle n induziert. (Wegen des Ausschneidungsaxioms ist die letzte Bedingung zum Beispiel erfüllt, wenn U und V offen sind.)

Zeige mit Hilfe von (i), dass es eine exakte *Mayer-Vietoris-Folge*

$$\cdots \longrightarrow k^n(X) \longrightarrow k^n(U) \oplus k^n(V) \longrightarrow k^n(U \cap V) \longrightarrow k^{n+1}(X) \longrightarrow \cdots$$

gibt.

Aufgabe 7.2: Zeige, dass für positive n und m jede stetige Abbildung $S^{n+m} \to S^n \times S^m$ den trivialen Homomorphismus $H_{n+m}(S^{n+m};\mathbb{Z}) \to H_{n+m}(S^n \times S^m;\mathbb{Z})$ induziert. (Hinweis: Benutze das Cup-Produkt in der Kohomologie dieser Räume.)

Aufgabe 7.3: Es sei $S^2 \vee S^4$ die *Einpunktvereinigung* von S^2 und S^4, also die Verklebung von S^2 und S^4 entlang eines Punktes.

Zeige, dass die Räume $\mathbb{C}P^2$ und $S^2 \vee S^4$ in allen Dimensionen und für alle Koeffizientengruppen isomorphe Kohomologiegruppen haben. Zeige, dass jedoch die ganzzahligen Kohomologieringe von $\mathbb{C}P^2$ und $S^2 \vee S^4$ nicht isomorph sind.

Aufgabe 7.4: Sei

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A'_2 \arrow[r] \arrow[d] & A_2 \arrow[r] \arrow[d] & \bar{A}_2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_1 \arrow[r] \arrow[d] & A_1 \arrow[r] \arrow[d] & \bar{A}_1 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'_0 \arrow[r] & A_0 \arrow[r] & \bar{A}_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

eine kurze exakte Folge inverser Systeme, also ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen mit exakten Zeilen. Zeige, dass die kurze exakte Folge eine exakte Folge

$$0 \to \lim A'_i \to \lim A_i \to \lim \bar{A}_i \to \lim^1 A'_i \to \lim^1 A_i \to \lim^1 \bar{A}_i \to 0$$

induziert. (Hat man einige weitere Begriffe und Resultate der homologischen Algebra entwickelt, so kann man mit Hilfe dieser exakten Folge $\lim^1$ mit dem *rechtsderivierten Funktor* von lim identifizieren.)

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
8. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 01.06.2011

Aufgabe 8.1: Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen einfach-zusammenhängenden CW-Komplexen, die Isomorphismen auf allen ganzzahligen Homologiegruppen induziert. Zeige, dass f eine Homotopieäquivalenz ist. (Hinweis: Benutze Abbildungszylinder, Hurewicz- und Whitehead-Satz).

Zeige weiterhin anhand eines Beispiels, dass es einfach zusammenhängende CW-Komplexe X und Y gibt, die nicht homotopieäquivalent zueinander sind obwohl ihre ganzzahligen Homologiegruppen in allen Dimensionen isomorph sind. (Es ist in der obigen Aussage also wesentlich zu fordern, dass die Isomorphismen von Homologiegruppen von einer stetigen Abbildung induziert werden.)

Aufgabe 8.2: Ein weg-zusammenhängender Raum X heißt *azyklisch*, wenn die Homologiegruppen $H_n(X, \mathbb{Z})$ für alle $n \geq 1$ trivial sind.

(i) Zeige, dass für jeden azyklischen Raum X und Basispunkt $x \in X$ die Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x)$ *perfekt* ist, d.h. gleich ihrer eigenen Kommutatoruntergruppe.

(ii) Sei X ein azyklischer CW-Komplex mit einer 0-Zelle $\{x_0\}$ als Basispunkt. Zeige, dass die reduzierte Einhängung
$$\Sigma X \;=\; X \times [0,1] \;/\; (X \times \{0,1\} \cup \{x_0\} \times [0,1])$$
zusammenziehbar ist. (Hinweis: Benutze die aus dem vorigen Semester bekannte Beziehung zwischen der Homologie eines Raumes und der seiner Einhängung sowie Hurewicz- und Whitehead-Satz).

Aufgabe 8.3: Zeige, dass eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen n-dimensionalen, wegzusammenhängenden, punktierten CW-Komplexen schon dann eine Homotopieäquivalenz ist, wenn sie Isomorphismen auf Homotopiegruppen π_i für $i \leq n$ induziert (obwohl die höheren Homotopiegruppen von X und Y im allgemeinen nicht-trivial sind!).

(Hinweis: Betrachte eine geliftete Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ zwischen universellen Überlagerungen. Zeige, dass $\tilde{f}$ die Voraussetzungen von Aufgabe 8.1 erfüllt. Schließe von $\tilde{f}$ zurück auf f.)

Aufgabe 8.4: Es sei X ein Raum, A ein Unterraum von X und $x_0 \in A$ ein Basispunkt.

(i) Zeige die Gleichung
$$x \cdot y \cdot x^{-1} \;=\; (\partial x) * y$$
in der (nicht notwendig kommutativen) Gruppe $\pi_2(X, A, x_0)$. Hierbei bezeichnet $\partial : \pi_2(X, A, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ den Verbindungshomomorphismus der langen Homotopiefolge des Tripels (X, A, x_0), '$\cdot$' die Gruppenstruktur auf $\pi_2(X, A, x_0)$ und '$*$' die Wirkung der Fundamentalgruppe $\pi_1(A, x_0)$ auf $\pi_2(X, A, x_0)$.

(ii) Sei $\pi_2'(X, A, x_0)$ der Quotient der Gruppe $\pi_2(X, A, x_0)$ nach dem Normalteiler erzeugt von den Elementen $(w{*}y){\cdot}y^{-1}$ für alle $y \in \pi_2(X, A, x_0)$ und $w \in \pi_1(A, x_0)$. Zeige, dass $\pi_2(X, A, x_0)'$ gleich der Gruppe $\pi_2(X, A, x_0)^\dagger$ (und damit insbesondere kommutativ) ist.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
9. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 08.06.2011

Aufgabe 9.1: Der *Abbildungskegel* Cf einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ ist definiert als der Quotientenraum der disjunkten Vereinigung von $X \times [0,1]$ und Y nach der Äquivalenzrelation, die einerseits den Unterraum $X \times \{0\}$ zu einem Punkt kollabiert und andererseits für alle $x \in X$ die Punkte $(x,1) \in X \times [0,1]$ und $f(x) \in Y$ identifiziert. Der Abbildungskegel ist also ein Quotientenraum des Abbildungszylinders.

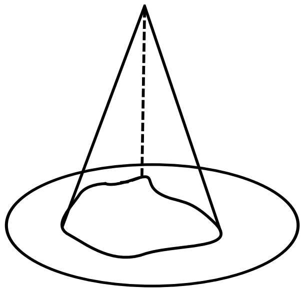

Abbildung 1: Abbildungskegel

(i) Konstruiere eine lange exakte Folge von Homologiegruppen

$$\cdots H_n(X;A) \xrightarrow{f_*} H_n(Y;A) \to H_n(Cf;A) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(X;A) \xrightarrow{f_*} \cdots$$

für beliebige Koeffizientengruppe A. (Hinweis: Identifiziere die Homologie von Cf mit der relativen Homologie des Paares (Zf, X), wobei Zf der Abbildungszylinder von f ist).

(ii) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen einfach-zusammenhängenden CW-Komplexen. Zeige, dass f genau dann eine Homotopie-Äquivalenz ist, wenn der Abbildungskegel Cf zusammenziehbar ist.

Aufgabe 9.2: Diese Übung zeigt, dass die höheren Homotopiegruppen eines endlichen CW-Komplexes nicht endlich erzeugt sein müssen (im Gegensatz dazu sind ja die ganzzahligen *Homologie*gruppen für solche Räume immer endlich erzeugt). Außerdem sehen wir hier ein Beispiel, in dem die Fundamentalgruppe in nicht-trivialer Weise auf einer höheren Homotopiegruppe operiert.

Sei $X = S^1 \vee S^2$ die Einpunkt-Vereinigung eines Kreises und einer 2-Sphäre. Berechne die Fundamentalgruppe und die zweite Homotopiegruppe von X:

(i) Finde die universelle Überlagerung von X. Berechne $\pi_1(X, x_0)$ durch die Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerung.

(ii) Berechne die Homologiegruppen des Totalraumes der universellen Überlagerung. Bestimme $\pi_2(X, x_0)$ mittels Hurewicz-Satz.

(iii) Gib eine Familie von stetigen Abbildungen $S^2 \to X$ an, deren Homotopieklassen eine Basis der abelschen Gruppe $\pi_2(X, x_0)$ bilden. Bestimme die Operation der Fundamentalgruppe $\pi_1(X, x_0)$ auf der Gruppe $\pi_2(X, x_0)$.

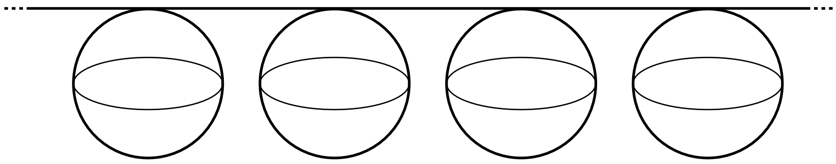

Abbildung 2: Die universelle Überlagerung von $S^1 \vee S^2$

Aufgabe 9.3: Sei X ein n-dimensionaler CW-Komplex und A ein Unterkomplex von X, der homotopieäquivalent zu S^n ist. Zeige: Die von von der Inklusion $A \to X$ induzierte Abbildung $\pi_n(A) \to \pi_n(X)$ ist injektiv.

Aufgabe 9.4: Sei X ein einfach-zusammenhängender CW-Komplex mit $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ und $H_i(X;\mathbb{Z}) \cong 0$ für $i \notin \{0,n\}$. Zeige, dass X homotopieäquivalent zu S^n ist.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
10. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 22.06.2011

Aufgabe 10.1: Sei A eine abelsche Gruppe und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl. Ein *Moore-Raum* vom Typ (A, n) ist ein wegzusammenhängender topologischer Raum X, für den $H_n(X;\mathbb{Z}) \cong A$ und $H_i(X;\mathbb{Z}) = 0$ falls $i \neq n$ (und $i > 0$) gilt.

Ein Moore-Raum hat also nur eine einzige nicht-triviale integrale Homologiegruppe positiver Dimension. (Eilenberg-Mac Lane-Räume sind im Gegensatz dazu durch eine einzige *Homotopie*gruppe charakterisiert.)

Zeige: Zu $n, m \geq 1$ gibt es einen Moore-Raum vom Typ $(\mathbb{Z}/m, n)$. (Hinweis: Konstruiere eine geeignete Abbildung zwischen Sphären und benutze Aufgabe 9.1.)

Aufgabe 10.2: In dieser Aufgabe geben wir eine algebraische Beschreibung der Homotopieklassen von Abbildungen zwischen den Eilenberg-Mac Lane-Räumen $|BG|$.

(i) Sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass φ eine Abbildung simplizialer Mengen $B\varphi\colon BG \to BG$ induziert, die $G \mapsto BG$ zu einem Funktor von der Kategorie der Gruppen und Gruppenhomomorphismen in die Kategorie der simplizialen Mengen macht.

(ii) Zwei Gruppenhomomorphismen $\varphi, \psi\colon G \to H$ heißen *konjugiert*, falls es ein Element $h \in H$ gibt, so dass für alle $g \in G$ die Beziehung $h \cdot \varphi(g) = \psi(g) \cdot h$ gilt. Zeige, dass die Morphismen $B\varphi, B\psi\colon BG \to BH$ von simplizialen Mengen homotop sind, falls φ und ψ konjugierte Homomorphismen sind.

(iii) Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathrm{Hom}(G,H)/\sim \;\longrightarrow\; [|BG|, |BH|]\,, \quad [\varphi\colon G \to H] \longmapsto |B\varphi|$$

eine Bijektion ist; hierbei ist die linke Seite die Menge aller Gruppenhomomorphismen modulo Konjugation und die rechte Seite bezeichnet die Menge der Homotopieklassen stetiger Abbildungen zwischen den geometrischen Realisierungen.

Aufgabe 10.3: Ein Morphismus $f\colon Y \to X$ von simplizialen Mengen ist eine *Überlagerung*, falls folgende Bedingung gilt. Zu allen $0 \leq i \leq n$, $x \in X_n$ und $q \in Y_0$ mit der Bedingung

$$f(q) \;=\; v_i^*(x) \;\in\; X_0$$

gibt es genau ein $y \in Y_n$ mit $f(y) = x$ und $v_i^*(y) = q$. Hierbei ist $v_i\colon [0] \to [n]$ der Morphismus in Δ gegeben durch $v_i(0) = i$.

(i) Es sei $f\colon Y \to X$ eine Überlagerung simplizialer Mengen. Zeige, dass $|f|\colon |Y| \to |X|$ eine Überlagerung topologischer Räume ist.

(ii) Es sei G eine Gruppe und X eine simpliziale G-Menge mit der Eigenschaft, dass die Wirkung von G auf X in jeder Dimension frei ist, Zeige, dass der Quotientenmorphismus $X \to X/G$ eine Überlagerung simplizialer Mengen ist.

Aufgabe 10.4: Sei $X_i, i \geq 1$ eine Folge von CW-Komplexen mit einer 0-Zelle $x_i \in X_i$ als Basispunkt, so dass X_i ein Eilenberg-Mac Lane-Raum vom Typ (A_i, i) ist.

Wir definieren

$$Y_n = X_1 \widehat{\times} \dots \widehat{\times} X_n$$

als das Produkt der ersten n dieser Räume versehen mit der "schwachen Topologie", die Y_n zu einem CW-Komplex macht. Dann induziert $\{x_n\} \subseteq X_n$ eine zelluläre Inklusion $Y_{n-1} \subseteq Y_n$. Sei schließlich

$$Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$$

die Vereinigung der Y_n. Als topologischer Raum trage Y die "Topologie der aufsteigenden Vereinigung", in der ein $U \subseteq Y$ genau dann offen in Y ist wenn für jedes n die Teilmenge $U \cap Y_n$ in Y_n offen ist.

Zeige: Es gilt $\pi_i(Y, y_0) \cong A_i$ für alle $i \geq 1$.

Dr. Steffen Sagave
www.math.uni-bonn.de/people/sagave/lehre/

Übungen zur Topologie II – Sommersemester 2011
11. Aufgabenblatt

Abgabetermin: 29.06.2011

Aufgabe 11.1: Es sei $n \geq 2$ und G eine Gruppe. In dieser Aufgabe konstruieren wir einen topologischen Raum X, dessen Fundamentalgruppe isomorph zu G ist und dessen n-te Homotopiegruppe ein beliebig vorgegebener $\mathbb{Z}G$-Modul ist. Für $G = \{1\}$ erhalten wir die Konstruktion eines Eilenberg-MacLane-Raumes aus der Vorlesung zurück.

(i) Es sei X ein Raum, der eine universelle Überlagerung besitzt und J eine Indexmenge. Wir definieren

$$Y \;=\; X \cup_{J \times S^{n-1}} J \times D^n$$

als Verklebung von X mit einer Menge von n-Zellen, indiziert durch J, wobei alle Anklebeabbildungen konstant auf einen festen Punkt x von X abbilden. Zeige, dass die Inklusion $X \to Y$ einen Isomorphismus auf Fundamentalgruppen induziert. Zeige, dass die Homotopieklassen der charakteristischen Abbildungen $i_j : D^n \to Y$ der n-Zellen für $j \in J$ eine Basis der relative Homotopiegruppe $\pi_n(Y, X, x)$ als $\mathbb{Z}[\pi_1(X, x)]$-Modul bilden.

(ii) Es sei jetzt X ein Eilenberg-MacLane-Raum der Dimension 1. Der Raum Y sei wie in (i) konstruiert. Zeige, dass die Homotopieklassen der Abbildungen $i_j : D^n \to Y$ für $j \in J$ eine Basis der absoluten Homotopiegruppe $\pi_n(Y, x)$ als $\mathbb{Z}[\pi_1(Y, x)]$-Modul bilden.

(iii) Der Raum Y sei wie in (ii). Wir setzen $G = \pi_1(Y, x)$ und identifizieren die Gruppe $\pi_n(Y, x)$ mit dem freien $\mathbb{Z}G$-Modul auf der Menge J wie oben. Es sei M ein $\mathbb{Z}G$-Modul und

$$\varepsilon \;:\; \mathbb{Z}G[J] \;\longrightarrow\; M$$

ein surjektiver $\mathbb{Z}G$-linearer Homomorphismus vom freien $\mathbb{Z}G$-Modul mit Basis J auf M. Es sei $\{x_i\}_{i \in I}$ ein Erzeugendensystem der Kerns von ε als $\mathbb{Z}G$-Modul. Für jedes $i \in I$ sei $\alpha_i : S^n \to Y$ eine stetige basierte Abbildung, die die Klasse $x_i \in \mathbb{Z}G[J] = \pi_n(Y, x)$ repräsentiert. Wir definieren

$$Z \;=\; Y \cup_{I \times S^n} I \times D^{n+1}$$

vermöge der α_i's als Anklebeabbildungen. Zeige, dass die Homotopiegruppen von Z in Dimensionen $2, \ldots, n-1$ trivial sind und dass $\pi_n(Z.x)$ isomorph zu M als $\mathbb{Z}G$-Modul ist.

(iv) Sei G eine Gruppe und M ein $\mathbb{Z}G$-Modul. Konstruiere einen punktierten, wegzusammenhängenden Raum W mit folgenden Eigenschaften:

(a) die Fundamentalgruppe $\pi_1(W, x)$ ist isomorph zu G,

(b) die Homotopiegruppe $\pi_n(W, x)$ ist isomorph zu M als $\mathbb{Z}G$-Modul, und

(c) für alle $i \neq 1, n$ ist die Homotopiegruppe $\pi_i(W, x)$ trivial.

Aufgabe 11.2: Sei k eine natürliche Zahl und C_k die zyklische Gruppe der Ordnung k. Berechne die Kohomologiegruppen $H^n(C_k \times C_k; \mathbb{Z}/k)$ für alle n.

Aufgabe 11.3: Sei p eine Primzahl, C_p die zyklische Gruppe der Ordnung p. Zeige, dass es keine freie und stetige Wirkung von $C_p \times C_p$ auf einer n-dimensionalen Sphäre S^n mit $n \geq 2$ geben kann.

(Anleitung: Angenommen, $G = C_p \times C_p$ wirkt frei auf S^n. Zeige, dass man dann durch Anheften einer $(n+1)$-Zelle und weiterer Zellen höherer Dimension an den Quotienten S^n/G einen Eilenberg-Mac Lane-Raum vom Typ $(G, 1)$ konstruieren kann und folgere daraus einen Widerspruch zur Berechnung von $H^{n+1}(G; \mathbb{Z}/p)$ aus Aufgabe 11.2.)