

De Minimax-Stelling en Nash-Evenwichten

Sebastiaan A. Terwijn

Radboud Universiteit Nijmegen
Afdeling Wiskunde
20 september 2010

Dit is een bijlage bij het eerstejaars keuzevak Wiskunde, Politiek, en Economie.

1 EINDIGE SPELEN

Spelen waarin de spelers de keuze hebben uit eindig veel zetten (die we ook wel acties of strategieën noemen) heten *eindige spelen*. We beschouwen spelen tussen twee spelers I en II waar speler I keuze heeft uit de acties $\{1, \dots, m\}$ en speler II uit de acties $\{1, \dots, n\}$. Zulke spelen heten $m \times n$ -spelen. Als I zet i doet en II zet j dan geeft dit een bepaalde uitkomst. De winst of het verlies bij een bepaalde uitkomst geven we aan met een reëel getal, voor beide spelers één. De uitkomsten in een $m \times n$ -spel kunnen dus worden beschreven door een reële matrix $A = (a_{ij})$ voor speler I en een matrix $B = (b_{ij})$ voor speler II, met $i = 1 \dots m$ en $j = 1 \dots n$. Gegeven A en B noteren we het bijbehorende spel $G = \langle A, B \rangle$ meestal met een matrix van paren als volgt:

		Speler II		
		1	...	n
Speler I	1	(a_{11}, b_{11})	...	(a_{1n}, b_{1n})
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
	m	(a_{m1}, b_{m1})	...	(a_{mn}, b_{mn})

Definitie 1.1. Een paar strategieën (i^*, j^*) heet een *Nash-evenwicht* als

$$\begin{aligned} \forall i \quad a_{i^*j^*} &\geq a_{ij^*} \\ \forall j \quad b_{i^*j^*} &\geq b_{i^*j} \end{aligned}$$

Dat wil zeggen, i^* is optimaal voor speler I *gegeven* dat II speelt j^* , en omgekeerd is j^* optimaal voor speler II *gegeven* dat I speelt i^* . Ofwel, gegeven het paar strategieën (i^*, j^*) heeft het voor geen der beide spelers zin om unilateraal van strategie te veranderen om de uitkomst te verbeteren. In deze zin is een Nash-evenwicht stabiel.

2 ZERO-SUM SPELEN

Zij $G = \langle A, B \rangle$ een $m \times n$ -spel gegeven door de matrices A en B . Als geldt dat $B = -A$, dat wil zeggen, voor alle i en j geldt $b_{ij} = -a_{ij}$, dan noemen we G een *zero-sum* spel. In een zero-sum spel is voor elke uitkomst de winst van I dus gelijk aan het verlies van II. In dit geval volstaat de matrix A als beschrijving van G .

Een voorbeeld van een zero-sum spel is “Matching Pennies”:

	heads	tails
heads	(1,-1)	(-1,1)
tails	(-1,1)	(1,-1)

We zien dat er in dit spel geen Nash-evenwichten zijn. In het vervolg zullen we kijken naar spelen waarin de spelers zogenaamde *gemengde (mixed)* strategieën kunnen spelen die een probabilistische combinatie zijn van gewone strategieën. Het cruciale inzicht van Von Neumann was dat er in zero-sum spelen met gemengde strategieën wel altijd een Nash-evenwicht is, en dat deze op een natuurlijke manier te definiëren zijn als minimax-strategieën. We definiëren nu eerst wat gemengde strategieën zijn, en formuleren en bewijzen vervolgens Von Neumann’s minimax-stelling.

3 GEMENGDE STRATEGIEËN

Zij $G = \langle A, B \rangle$ een $m \times n$ -spel. We noemen de strategieën $\{1, \dots, m\}$ voor speler I en $\{1, \dots, n\}$ voor speler II ook wel *pure* strategieën. Een *gemengde (mixed)* strategie voor speler I is een kansverdeling op $\{1 \dots m\}$, dat wil zeggen, een vector $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ met $x_i \geq 0$ en $\sum_i x_i = 1$. Zo’n vector noemen we een *kansvector*. Een gemengde strategie voor speler II is een kansverdeling op $\{1 \dots n\}$, dat wil zeggen, een kansvector $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. De interpretatie hiervan is dat speler I de zet i speelt met kans x_i , en speler II zet j met kans y_j .

Als II kolom j speelt dan is de *verwachte* uitkomst voor I bij gebruik van strategie x gelijk aan $\sum_i a_{ij}x_i$. Als I rij i speelt dan is de verwachte uitkomst voor II bij gebruik van y gelijk aan $\sum_j b_{ij}y_j$.

Definiër voor elk paar kansvectoren x en y ,

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}x_iy_j \\ &= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n a_{ij}y_j \\ &= xAy. \end{aligned}$$

Hier is xAy het inwendig product van de vectoren x en Ay in $\mathbb{R}^m$. Omdat de verwachte uitkomst voor I als I rij i speelt gelijk is aan $\sum_j a_{ij}y_j$ kunnen we $u_1(x, y)$ zien als de *verwachte uitkomst* (payoff) voor speler I.

Evenzo, als we definiëren

$$u_2(x, y) = xBy$$

dan geeft u_2 de verwachte uitkomst voor speler II.

We definiëren nu het begrip Nash-evenwicht opnieuw voor gemengde strategieën:

Definitie 3.1. Een paar gemengde strategieën (x^*, y^*) heet een *Nash-evenwicht* als

$$\begin{aligned}\forall x \quad u_1(x^*, y^*) &\geq u_1(x, y^*) \\ \forall y \quad u_2(x^*, y^*) &\geq u_2(x^*, y)\end{aligned}$$

In zero-sum spelen hebben we per definitie alleen matrix A en schrijven we eenvoudig $u(x, y) = xAy$. Merk op dat omdat in dit geval $u_2 = -u_1 = -u$ geldt dat (x^*, y^*) een Nash-evenwicht is als

$$\begin{aligned}\forall x \quad u(x^*, y^*) &\geq u(x, y^*) \\ \forall y \quad u(x^*, y^*) &\leq u(x^*, y)\end{aligned}$$

Zo'n punt (x^*, y^*) heet ook wel een *zadelpunt* van de functie $u(x, y)$.

4 MINIMAX-STRATEGIEËN EN NASH-EVENWICHTEN

We bekijken nu het verband tussen Nash-evenwichten in zero-sum spelen en zogenaamde minimax-strategieën. We beschouwen weer zero-sum spelen tussen twee spelers met gemengde strategieën.

Strategie x^* is *maximin*-strategie voor I als geldt dat

$$\min_y u(x^*, y) \geq \min_y u(x, y)$$

voor alle x . Dat wil zeggen, x^* is oplossing van $\max_x \min_y u(x, y)$. Analoog is y^* een *minimax*-strategie voor II als $\max_x u(x, y^*) = \min_y \max_x u(x, y)$.

Propositie 4.1. (i) Als (x^*, y^*) een Nash-evenwicht is dan is x^* een maximin-strategie voor I en y^* een minimax-strategie voor II. Bovendien geldt

$$u(x^*, y^*) = \max_x \min_y u(x, y) = \min_y \max_x u(x, y).$$

(ii) Als $\max_x \min_y u(x, y) = \min_y \max_x u(x, y)$, en x^* en y^* zijn respectievelijk maximin- en minimax-strategieën dan is (x^*, y^*) een Nash-evenwicht.

Bewijs. (i) Als (x^*, y^*) een Nash-evenwicht is dan $u(x^*, y^*) \leq u(x^*, y)$ voor alle y , dus

$$u(x^*, y^*) = \min_y u(x^*, y) \leq \max_x \min_y u(x, y).$$

Tevens geldt dat $u(x^*, y^*) \geq u(x, y^*) \geq \min_y u(x, y)$ voor alle x , dus we hebben ook

$$u(x^*, y^*) \geq \max_x \min_y u(x, y).$$

Het geval $u(x^*, y^*) = \min_y \max_x u(x, y)$ is analoog.

Uit het bovenstaande volgt dat x^* een maximin-strategie is:

$$\begin{aligned} \min_y u(x^*, y) &\geq u(x^*, y^*) && (\text{want } (x^*, y^*) \text{ is Nash-evenwicht}) \\ &= \max_x \min_y u(x, y) \\ &\geq \min_y u(x, y) && \text{voor alle } x. \end{aligned}$$

Op analoge wijze volgt dat y^* een minimax-strategie is.

(ii) Laat $v = \max_x \min_y u(x, y) = \min_y \max_x u(x, y)$. Omdat x^* maximin is en y^* minimax geldt voor alle x en y ,

$$u(x^*, y) \geq \min_y u(x^*, y) = \max_x \min_y u(x, y) = v, \quad (1)$$

$$u(x, y^*) \leq \max_x u(x, y^*) = \min_y \max_x u(x, y) = v. \quad (2)$$

Hieruit volgt dat $u(x^*, y^*) = v$, en dus volgt uit (1) en (2) samen dat (x^*, y^*) een Nash-evenwicht is. $\square$

5 DE DEKPUNTSTELLING VAN BROUWER

Het bewijs van de minimax-stelling gebruikt de volgende beroemde stelling van L. E. J. Brouwer.

Stelling 5.1. (Dekpuntstelling van Brouwer) Zij $X \subseteq \mathbb{R}^n$ compact en convex, en zij $f : X \rightarrow X$ continu.¹ Dan heeft f een dekpunt, dat wil zeggen, er is een $x \in X$ met $f(x) = x$.

Voor een bewijs van Stelling 5.1 verwijzen we naar het college algebraïsche topologie of naar een willekeurig boek over dit onderwerp. Zie bijvoorbeeld Massey [2, p188].

6 DE MINIMAX-STELLING

De minimax-stelling gaat over zero-sum spelen tussen twee spelers met gemengde strategieën. Laat $A = (a_{ij})$ een reële matrix zijn die een zero-sum spel definieert, en voor elk paar kansvectoren (x, y) schrijf $u(x, y) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j = xAy$ voor de verwachte uitkomst. Laat e_i de i -de eenheidsvector in $\mathbb{R}^m$ zijn, en e_j de j -de eenheidsvector in $\mathbb{R}^n$. Gegeven een paar kansvectoren (x, y) is dus $u(e_i, y)$ de verwachte uitkomst als I i speelt, en $u(x, e_j)$ de verwachte uitkomst als II j speelt.

Merk op dat we voor alle x en y hebben:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^m x_i u(e_i, y) = \sum_{j=1}^n y_j u(x, e_j).$$

¹Voor een precieze behandeling van de hier genoemde begrippen verwijzen we naar het college Analyse. Een verzameling in $X \subset \mathbb{R}^n$ is compact als X gesloten is en begrensd. X is convex als geldt dat voor alle $x, y \in X$ ook alle punten op het lijnsegment tussen x en y in X liggen. Een functie f op X is continu als geldt dat wanneer x_n een rij punten in X is die naar $x \in X$ convergeert, de rij $f(x_n)$ naar $f(x)$ convergeert.

Stelling 6.1. (Von Neumann [1])

- (i) Er zijn kansvectoren $x^* \in \mathbb{R}^m$ en $y^* \in \mathbb{R}^n$ en een unieke constante v (de waarde van het spel) zodat

$$u(x^*, e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} x_i^* \geq v \text{ voor alle } j,$$

$$u(e_i, y^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j^* \leq v \text{ voor alle } i.$$

- (ii) Het paar (x^*, y^*) uit (i) vormt een Nash-evenwicht.
- (iii) $\min_y \max_x u(x, y) = \max_x \min_y u(x, y)$. Hier lopen x en y over alle mogelijke kansvectoren.

(i) zegt dus dat er een gemengde strategie x^* is die speler I een minimale verwachte payoff v garandeert, ongeacht de strategie van speler II, en dat deze v tevens het maximum verwachte verlies is voor speler II bij gebruik van strategie y^* .

Bewijs. (i) Gegeven een paar kansvectoren (x, y) definiëer

$$p_i = u(e_i, y) - u(x, y)$$

$$q_j = u(x, y) - u(x, e_j).$$

We willen (x, y) zodat $p_i \leq 0$ voor alle i en $q_j \leq 0$ voor alle j , zodat we $v = u(x, y)$ kunnen nemen.

Definiëer $f(x, y) = (\sigma, \tau)$, waar $\sigma \in \mathbb{R}^m$ en $\tau \in \mathbb{R}^n$ gedefiniëerd zijn door

$$\sigma_i = \frac{x_i + \max(p_i, 0)}{1 + \sum_{k=1}^m \max(p_k, 0)} \quad \tau_j = \frac{y_j + \max(q_j, 0)}{1 + \sum_{l=1}^n \max(q_l, 0)}$$

De functie f is duidelijk continu (want de componenten van f zijn gedefiniëerd met behulp van continue transformaties) en het is niet moeilijk om in te zien dat de verzameling paren van kansvectoren compact is en convex, dus wegens Stelling 5.1 heeft f een dekpunt (x^*, y^*) . Uit $f(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$ volgt dat

$$x_i^* = \frac{x_i^* + \max(p_i, 0)}{1 + \sum_{k=1}^m \max(p_k, 0)} \quad (3)$$

zodat $x_i^* \sum_k \max(p_k, 0) = \max(p_i, 0)$ voor alle i . Uit

$$\sum_i x_i^* p_i = \sum_i x_i^* u(e_i, y^*) - \sum_i x_i^* u(x^*, y^*) = u(x^*, y^*) - u(x^*, y^*) = 0$$

volgt dat er een i is met $x_i^* > 0$ en $p_i \leq 0$.² Hieruit volgt met (3) dat $\sum_k \max(p_k, 0) = 0$, dus $p_k \leq 0$ voor alle k . Op analoge wijze volgt dat $q_l \leq 0$ voor alle l , hetgeen is wat we wilden bewijzen.

²Gegeven $g_1 \dots g_m$ en $E = \sum_i x_i g_i$ dan is er $x_i > 0$ met $E \geq g_i$ want anders $E = \sum_i x_i E < \sum_i x_i g_i$.

Merk tenslotte nog op dat de uniciteit van $v = u(x^*, y^*)$ nu volgt uit onderdeel (ii) en Propositie 4.1.

(ii) Merk op dat uit (i) volgt dat

$$\begin{aligned} u(x^*, y) &\geq v \text{ voor alle } y, \\ u(x, y^*) &\leq v \text{ voor alle } x. \end{aligned}$$

Namelijk, $u(x^*, y) = \sum_j u(x^*, e_j)y_j \geq \sum_j vy_j = v$, en analoog voor de tweede ongelijkheid. Dat (x^*, y^*) een Nash-evenwicht is volgt nu omdat we in het bewijs van (i) hadden dat $v = u(x^*, y^*)$.

(iii) volgt direct uit Propositie 4.1. □

REFERENTIES

- [1] J. von Neumann, *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen 100 (1928) 295–300.
- [2] W. S. Massey *A basic course in algebraic topology*, Springer, 1991.