УДК 517.5

В. В. Зудилин

О рациональных приближениях значений одного класса целых функций

Доказывается точная оценка снизу для меры иррациональности значений $\mathbb{Q}$E-функций, удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений произвольного порядка, в рациональной точке.

Библиография: 15 названий.

Введение

В 1929 году К. Зигель [1] предложил метод оценки снизу линейных форм от значений в рациональной точке целых функций некоторого класса, названных им E-функциями. В этой работе указывалось (без доказательства), что для значений функции Бесселя

$$J_0(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu}{(\nu!)^2}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\nu}$$

и ее производной в рациональной точке $\alpha\ne0$ справедливо неравенство

$$\begin{gathered}|h_0+h_1J_0(\alpha)+h_2J_0'(\alpha)|>CH^{-2-\delta},\qquad \delta>0,\\ h_j\in\mathbb{Z},\quad H=\max_{0\leqslant j\leqslant 2}\{|h_j|\}>0,\quad C=C(\alpha,\delta)>0.\end{gathered}$$

Метод Зигеля был существенно обобщен в работах А. Б. Шидловского. В частности, в 1967 г. в статье [2] был доказан следующий результат:

Пусть совокупность E-*функций* $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m\geqslant1$, *с рациональными коэффициентами рядов Тейлора линейно независима над* $\mathbb{C}(z)$ *с единицей и составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений*

$$\begin{gathered}\frac{d}{dz}y_l=Q_{l0}+\sum_{j=1}^{m}Q_{lj}y_j,\qquad l=1,\dots,m,\\ Q_{lj}=Q_{lj}(z)\in\mathbb{C}(z),\qquad l=1,\dots,m,\quad j=0,\dots,m,\end{gathered}\tag{0.1}$$

и $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ – *произвольная неособая точка этой системы. Тогда для любого* $\delta>0$ *существует постоянная* $C=C(f_1,\dots,f_m;\alpha,\delta)>0$ *такая, что*

$$|h_0+h_1f_1(\alpha)+\dots+h_mf_m(\alpha)|>CH^{-m-\delta},\qquad h_j\in\mathbb{Z},\quad H=\max_{0\leqslant j\leqslant m}\{|h_j|\}>0.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 94-01-00739).

В этом же году в заметке [3] были анонсированы, а в 1979 г. в статье [4] опубликованы доказательства оценок, уточняющих остаточный член в показателе неравенства, а именно, что в условиях сформулированной теоремы *существует постоянная* $\gamma=\gamma(f_1,\dots,f_m;\alpha)>0$ *такая, что для всех* $H\geqslant H_*(f_1,\dots,f_m;\alpha)$

$$|h_0+h_1f_1(\alpha)+\dots+h_mf_m(\alpha)|>H^{-m-\gamma(\ln\ln H)^{-1/2}}. \tag{0.2}$$

При этом использовалось следующее более ограничительное, чем в [1], определение E-функции.

Определение (см. [5]). Функция

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu}{\nu!}z^\nu \tag{0.3}$$

называется $\mathbb{Q}$E-*функцией*, если выполнены следующие условия:

1) $f_\nu\in\mathbb{Q}$ для $\nu\in\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\dots\}$;
2) для некоторой положительной константы C справедливо неравенство $|f_\nu|<C^{\nu+1}$ при $\nu\in\mathbb{Z}^+$;
3) существует последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}=\mathbb{Z}^+\setminus\{0\}$ такая, что $\varphi_nf_\nu\in\mathbb{Z}$, $\nu=0,1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$, и $\varphi_n<C^n$ при $n\in\mathbb{N}$.

Отметим, что все гипергеометрические функции с рациональными параметрами удовлетворяют данному определению (см. [6, гл. 5 §1]).

Из (0.2) вытекает оценка для рациональных приближений значений любой из участвующих $\mathbb{Q}$E-функций:

$$\begin{gathered}\left|f_l(\alpha)-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-m-1-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/2}},\qquad l=1,\dots,m,\quad p,q\in\mathbb{Z},\\ |q|\geqslant q_*(f_1,\dots,f_m;\alpha),\qquad \gamma=\gamma(f_1,\dots,f_m;\alpha).\end{gathered} \tag{0.4}$$

В 1984 году Г.В. Чудновский в статье [7] предложил оригинальную конструкцию, позволяющую получать оценки снизу линейных форм от значений $\mathbb{Q}$E-функций, каждая из которых удовлетворяет своему однородному дифференциальному уравнению произвольного порядка. При этом на совокупность уравнений накладывалось очень жесткое ограничительное условие. В настоящей работе оно заменено на более слабое условие алгебраической независимости рассматриваемых функций. Ниже доказывается следующее усиление оценки (0.4).

Основная теорема. *Пусть алгебраически независимые над* $\mathbb{C}(z)$ $\mathbb{Q}$E-*функции* $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m\geqslant 2$, *составляют решение системы* (0.1). *Пусть, кроме того,* $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ – *неособая точка системы* (0.1). *Тогда существует постоянная* $\gamma=\gamma(f_1,\dots,f_m;\alpha)>0$ *такая, что для всех* $q\in\mathbb{Z}$, $|q|\geqslant q_*(f_1,\dots,f_m;\alpha)$, *справедливы неравенства*

$$\left|f_l(\alpha)-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(m+1)}},\qquad l=1,\dots,m,$$

каково бы ни было целое p.

Следствие 1. *Пусть* $\mathbb{Q}$E-*функция* $f(z)$ *удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$A_m y^{(m)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = B, \qquad m \geqslant 2,$$
$$A_j = A_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad B = B(z) \in \mathbb{C}[z],$$

порядка m *и алгебраически независима над* $\mathbb{C}(z)$ *со своими производными* $f'(z), \dots, f^{(m-1)}(z)$. *Пусть, кроме того,* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *и* $\alpha A_m(\alpha) \neq 0$. *Тогда существует постоянная* $\gamma = \gamma(f; \alpha) > 0$ *такая, что для всех* $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(m+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство. Совокупность m $\mathbb{Q}$E-функций $f_l(z) = f^{(l-1)}(z)$, $l = 1, \dots, m$, составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому к ней применима основная теорема, из которой и вытекает требуемое неравенство.

Следствие 2. *Пусть* t, l – *неотрицательные целые числа*, t *нечетно*, $t + l > 1$, *и параметры* $\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\}$ *функции*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\beta_1)_\nu \dots (\beta_l)_\nu}{(\lambda_1 + 1)_\nu \dots (\lambda_{t+l} + 1)_\nu} \left(\frac{z}{t} \right)^{t\nu},$$

где

$$(\beta)_0 = 1, \quad (\beta)_\nu = \beta(\beta + 1) \dots (\beta + \nu - 1), \qquad \nu = 1, 2, \dots,$$

удовлетворяют следующим условиям:

1) $\lambda_i - \beta_j \notin \mathbb{Z}$ *для всех* $i = 1, \dots, t + l$, $j = 1, \dots, l$;

2) *не существует общего делителя* $d > 1$ *чисел* t, l *такого, что*

$$(\lambda_1 + 1/d, \dots, \lambda_{t+l} + 1/d) \sim (\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}), \quad (\beta_1 + 1/d, \dots, \beta_l + 1/d) \sim (\beta_1, \dots, \beta_l)$$

(*запись* $(\beta'_1, \dots, \beta'_m) \sim (\beta_1, \dots, \beta_m)$ *означает, что для некоторой перестановки* $\sigma\colon \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, m\}$, *отличной от тождественной, при всех* $j = 1, \dots, m$ *выполнено* $\beta'_j - \beta_{\sigma(j)} \in \mathbb{Z}$).

Тогда для любого $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *существует постоянная*

$$\gamma = \gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \dots, \beta_l; \alpha) > 0$$

такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda_1, \dots, \lambda_{t+l}; \beta_1, \dots, \beta_l; \alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(t+l+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство. Функция $f(z)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Bigl(\Bigl(z\frac{d}{dz}+t\lambda_1\Bigr)\dots\Bigl(z\frac{d}{dz}+t\lambda_{t+l}\Bigr)-z^t\Bigl(z\frac{d}{dz}+t\beta_1\Bigr)\dots\Bigl(z\frac{d}{dz}+t\beta_l\Bigr)\Bigr)y=t^{t+l}\lambda_1\dots\lambda_{t+l},$$

а алгебраическая независимость функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(t+l-1)}(z)$ вытекает из теоремы 1.I работы В. Х. Салихова [8].

Замечание. Если воспользоваться теоремой 1.II [8], то можно получить аналогичный результат и в случае четного t.

В случае $l=0$ условия следствия 2 можно упростить.

Следствие 3. *Пусть целое $t>1$ нечетно или $t=2$, и параметры $\lambda_1,\dots,\lambda_t \in \mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}$ функции*

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_1+1)_\nu\dots(\lambda_t+1)_\nu}\Bigl(\frac{z}{t}\Bigr)^{t\nu}$$

не удовлетворяют следующему условию: числа $t\lambda_1,\dots,t\lambda_t$ являются целыми и образуют полную систему вычетов по $\operatorname{mod} t$.

Тогда для любого $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ существует постоянная $\gamma=\gamma(\lambda_1,\dots,\lambda_t;\alpha)>0$ такая, что для всех $q\in\mathbb{Z}$, $|q|\geqslant q_*(\lambda_1,\dots,\lambda_t;\alpha)$, справедливо неравенство

$$\Bigl|f(\alpha)-\frac{p}{q}\Bigr|>|q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(t+1)}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство алгебраической независимости функций $f(z), f'(z), \dots, f^{(t-1)}(z)$ в случае нечетного t получено в работе В. Х. Салихова [9] при доказательстве теоремы 2; при $t=2$ этот результат вытекает из теоремы 4 статьи В. А. Олейникова [10].

Замечание. В случае $m=2$ условие алгебраической независимости в формулировке основной теоремы может быть ослаблено до условия линейной независимости рассматриваемых функций. Это позволяет уточнить выписанные следствия (см. § 4). Отметим также, что в случае $t=2$, $\lambda_2=0$ утверждение следствия 3 было доказано в 1987 г. в дипломной работе В. В. Титенко.

Обозначим через $T=T(z)\in\mathbb{C}[z]$ многочлен, являющийся наименьшим общим знаменателем рациональных функций Q_{lj}, $l=1,\dots,m$, $j=0,1,\dots,m$, в условии основной теоремы. Как следует из леммы 3 [6, гл. 3], можно считать, что $Q_{lj}\in\mathbb{Q}(z)$, $l=1,\dots,m$, $j=0,1,\dots,m$, и многочлен T выбран таким, что

$$T\in\mathbb{Z}[z],\qquad TQ_{lj}\in\mathbb{Z}[z],\quad l=1,\dots,m,\quad j=0,\dots,m. \tag{0.5}$$

Представление функции $f(z)$ в виде ряда (0.3) будем называть нормальным разложением функции в степенной ряд (или просто нормальным разложением), а числа $\{f_\nu\}_{\nu=0}^{\infty}$ – коэффициентами в нормальном разложении. При этом в случае $f(z)\in\mathbb{C}[z]$ будет считаться, что $f_\nu=0$ для $\nu>\deg f$.

Доказательство неравенства основной теоремы будем проводить для фиксированного $l=l^*$, $1\leqslant l^*\leqslant m$.

§ 1. Конструкция рациональных приближений к числу $f_{l^*}(\alpha)$

Для доказательства основной теоремы воспользуемся схемой Г. В. Чудновского [7]. Системы приближающих линейных форм, строящиеся ниже, будут зависеть от натурального параметра M. Положим

$$N = \left[(\ln M)^{1/(m+1)}\right], \qquad \varepsilon = \frac{1}{3(N+m-1)}, \tag{1.1}$$

при этом будем считать M достаточно большим, т.е. $M > M_*(f_1, \ldots, f_m)$. Буквы C с индексами будем использовать для обозначения положительных констант, зависящих от функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ и числа α. Пусть также $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ – переменные. В дальнейшем будут встречаться суммы, слагаемые которых нумеруются мультииндексами $\overline{\varkappa} = (\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m) \in \mathbb{Z}^m$. При этом если в некоторой сумме по $\overline{\varkappa}$ встретится слагаемое хотя бы с одной компонентой $\varkappa_j < 0$, то будем считать это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Через $\overline{e}_j$ обозначим мультииндекс, у которого на месте с номером j стоит единица, а на остальных местах – нули. Для экономии места в формулах будем писать:

$$\overline{a}^{\overline{\varkappa}} = \prod_{j=1}^{m} a_j^{\varkappa_j}; \qquad |\overline{\varkappa}| = \sum_{j=1}^{m} \varkappa_j.$$

Введем множества мультииндексов

$$\Omega = \Omega(m, N) = \bigl\{\overline{\varkappa} : |\overline{\varkappa}| \in \{N-1, N\}\bigr\}, \qquad \Theta = \Theta(m, N) = \{\overline{s} : |\overline{s}| = N\},$$
$$\omega = \operatorname{Card}\Omega = \binom{N+m-2}{m-1} + \binom{N+m-1}{m-1}, \quad \theta = \operatorname{Card}\Theta = \binom{N+m-1}{m-1}.$$

Рассмотрим формы от переменных $a_1, \ldots, a_m$ с функциональными коэффициентами вида

$$R(z; \overline{a}) = \sum_{\overline{\varkappa}: |\overline{\varkappa}| = N} \overline{a}^{\overline{\varkappa}} P_{\overline{\varkappa}}(z) + \sum_{\overline{\varkappa}: |\overline{\varkappa}| = N-1} \overline{a}^{\overline{\varkappa}} P_{\overline{\varkappa}}(z) \sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z), \qquad P_{\overline{\varkappa}}(z) \in \mathbb{C}[z]. \tag{1.2}$$

Поскольку такие формы однородны и имеют степень N, их можно представить в виде

$$R(z; \overline{a}) = \sum_{\overline{s} \in \Theta} \overline{a}^{\overline{s}} R_{\overline{s}}(z). \tag{1.3}$$

Упорядочим элементы множества Ω и Θ в лексикографическом порядке, т.е. будем говорить, что мультииндекс $\overline{\varkappa}$ меньше мультииндекса $\overline{\varkappa}'$ (запись $\overline{\varkappa} \prec \overline{\varkappa}'$), если $\varkappa_1 = \varkappa_1', \varkappa_2 = \varkappa_2', \ldots, \varkappa_{j-1} = \varkappa_{j-1}'$, но $\varkappa_j < \varkappa_j'$ для некоторого j, $1 \leqslant j \leqslant m$. Через $\delta_{\overline{s}', \overline{s}}$, $\overline{s}', \overline{s} \in \Theta$, обозначим "обобщенный" символ Кронекера множества Θ, а именно,

$$\delta_{\overline{s}', \overline{s}} = \begin{cases} 1 & \text{при } \overline{s}' = \overline{s}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Выразим теперь элементы строки $(R_{\overline{s}}(z))_{\overline{s}\in\Theta}$ через элементы строки $(P_{\overline{\varkappa}}(z))_{\overline{\varkappa}\in\Omega}$. Сравнивая для этого коэффициенты при $\overline{a}^{\overline{s}}$, $\overline{s}\in\Theta$, в (1.2) и (1.3), получим:

$$R_{\overline{s}}(z)=\sum_{\overline{\varkappa}:|\overline{\varkappa}|=N}P_{\overline{\varkappa}}(z)\delta_{\overline{\varkappa},\overline{s}}+\sum_{\overline{\varkappa}:|\overline{\varkappa}|=N-1}P_{\overline{\varkappa}}(z)\sum_{j=1}^{m}\delta_{\overline{\varkappa}+\overline{e}_j,\overline{s}}f_j(z),\qquad \overline{s}\in\Theta, \quad (1.4)$$

или

$$R_{\overline{s}}(z)=P_{\overline{s}}(z)+\sum_{j=1}^{m}P_{\overline{s}-\overline{e}_j}(z)f_j(z),\qquad \overline{s}\in\Theta. \quad (1.5)$$

ЛЕММА 1.1. *Для натурального $M>M_*$ и выбранных согласно* (1.1) *чисел N и ε существуют многочлены $P_{\overline{\varkappa}}(z)\in\mathbb{Q}[z]$, $\overline{\varkappa}\in\Omega$, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *не все они тождественно равны нулю*;
2) $\deg P_{\overline{\varkappa}}<M$ *для всех* $\overline{\varkappa}\in\Omega$;
3) *коэффициенты в нормальном разложении этих многочленов являются целыми числами, ограниченными по модулю величиной* $C_0^{\omega M/\varepsilon}$;
4) *порядок нуля в точке $z=0$ каждой из линейных функциональных форм* (1.5) *не ниже*

$$K=\left[\frac{(\omega-\varepsilon)M}{\theta}\right]=\left[\left(2-\frac{m-1}{N+m-1}-\frac{\varepsilon}{\theta}\right)M\right].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим нормальное разложение требуемых многочленов:

$$P_{\overline{\varkappa}}(z)=\sum_{\nu=0}^{M-1}\frac{P_{\overline{\varkappa},\nu}}{\nu!}z^{\nu},\qquad \overline{\varkappa}\in\Omega, \quad (1.6)$$

и будем искать нужную совокупность целых чисел $P_{\overline{\varkappa},\nu}$, $\overline{\varkappa}\in\Omega$, $\nu=0,1,\dots,M-1$, общее количество которых $\Psi=\omega M$.

Пользуясь определением $\mathbb{Q}$E-функции одновременно для функций

$$f_j(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_{j,\nu}}{\nu!}z^{\nu},\qquad j=1,\dots,m,$$

получим некоторую положительную константу C и последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$ такие, что

$$|\varphi_K f_{j,\nu}|<C^{2K},\quad \varphi_K f_{j,\nu}\in\mathbb{Z},\qquad j=1,\dots,m,\quad \nu=0,1,\dots,K-1. \quad (1.7)$$

Запишем искомые формы в виде

$$R_{\overline{s}}(z)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{R_{\overline{s},\mu}}{\mu!}z^{\mu},\qquad \overline{s}\in\Theta,$$

где, согласно формулам (1.5),

$$R_{\overline{s},\mu} = P_{\overline{s},\mu} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{\substack{0\leqslant\nu\leqslant\mu \\ \mu-\nu<M}} \binom{\mu}{\nu} P_{\overline{s}-\overline{e}_j,\mu-\nu} f_{j,\nu}, \qquad \mu = 0,1,\ldots,K-1.$$

Домножая каждое из этих равенств на φ_K, мы получим, согласно условию

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\overline{s}}(z) \geqslant K, \qquad \overline{s}\in\Theta,$$

в точности $\Upsilon = \theta K \leqslant (\omega-\varepsilon)M$ линейных уравнений

$$\varphi_K R_{\overline{s},\mu} = 0, \qquad \overline{s}\in\Theta, \quad \mu = 0,1,\ldots,K-1,$$

относительно $P_{\overline{\varkappa},\nu}$, $\overline{\varkappa}\in\Omega$, $\nu = 0,1,\ldots,M-1$, целые коэффициенты которых ограничены по модулю величиной $2^{K}C^{2K}$ в силу (1.7) и того, что

$$\binom{\mu}{\nu} < 2^K, \qquad \nu = 0,1,\ldots,\mu, \quad \mu = 0,1,\ldots,K-1.$$

Осталось воспользоваться леммой Зигеля (см. [6, гл. 3, лемма 11]), согласно которой существует нетривиальный набор многочленов (1.6) с целыми коэффициентами в нормальном разложении, ограниченными по модулю величиной

$$\bigl(\Psi 2^K C^{2K}\bigr)^{\Upsilon/(\Psi-\Upsilon)} < \bigl(\omega M 2^{2M} C^{4M}\bigr)^{\omega/\varepsilon}.$$

Учитывая, что $\omega < M$, согласно (1.1), получаем требуемое.

Введем дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial z} - \sum_{j=1}^{m}\Biggl(\sum_{l=1}^{m} Q_{lj}(z)a_l\Biggr)\frac{\partial}{\partial a_j},$$

связанный с системой линейных однородных уравнений, сопряженной к системе (0.1). Тогда

$$\begin{aligned} D\sum_{j=1}^{m} a_j f_j(z) &= \sum_{j=1}^{m} a_j \frac{\partial f_j}{\partial z}(z) - \sum_{j=1}^{m}\Biggl(\sum_{l=1}^{m} Q_{lj}(z)a_l\Biggr) f_j(z) \\ &= \sum_{l=1}^{m} a_l \frac{\partial f_l}{\partial z}(z) - \sum_{l=1}^{m} a_l \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(z) f_j(z) \\ &= \sum_{l=1}^{m} a_l \Biggl(f_l'(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}(z) f_j(z)\Biggr) \\ &= \sum_{l=1}^{m} a_l Q_{l0}(z). \end{aligned}$$

Поэтому функциональные формы вида (1.2) после применения к ним оператора D и умножения на $T(z)$ переходят в формы того же вида с другими коэффициентами-многочленами $P_{\overline{\varkappa}}(z)$, $\overline{\varkappa}\in\Omega$.

Положим

$$\begin{aligned} P_{\overline{\varkappa}}^{[0]}(z)&=P_{\overline{\varkappa}}(z), \qquad \overline{\varkappa}\in\Omega,\\ R_{\overline{s}}^{[0]}(z)&=R_{\overline{s}}(z), \qquad \overline{s}\in\Theta, \end{aligned}$$

где $P_{\overline{\varkappa}}(z)$, $\overline{\varkappa}\in\Omega$, и $R_{\overline{s}}(z)$, $\overline{s}\in\Theta$, – построенные в лемме 1.1 многочлены и отвечающие им линейные формы (1.5);

$$R^{[0]}(z;\overline{a})=\sum_{\overline{s}\in\Theta}\overline{a}^{\overline{s}}R_{\overline{s}}^{[0]}(z).$$

Тогда функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\overline{a})=\bigl(T(z)D\bigr)^nR^{[0]}(z;\overline{a}), \qquad n\geqslant 0,$$

будут иметь вид

$$R^{[n]}(z;\overline{a})=\sum_{\overline{\varkappa}:|\overline{\varkappa}|=N}\overline{a}^{\overline{\varkappa}}P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)+\sum_{\overline{\varkappa}:|\overline{\varkappa}|=N-1}\overline{a}^{\overline{\varkappa}}P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)\sum_{j=1}^m a_jf_j(z), \qquad n\geqslant 0,$$

и входящие в них многочлены от z удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} P_{\overline{\varkappa}}^{[n+1]}(z)=T(z)\biggl(\frac{d}{dz}P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)-\sum_{l,j=1}^m(\varkappa_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)P_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_l+\overline{e}_j}^{[n]}(z)\\ +\bigl(|\overline{\varkappa}|-N+1\bigr)\sum_{l=1}^mQ_{l0}(z)P_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_l}^{[n]}(z)\biggr), \qquad \overline{\varkappa}\in\Omega, \quad n\geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и отвечающие каждой функциональной форме

$$R^{[n]}(z;\overline{a})=\sum_{\overline{s}\in\Theta}\overline{a}^{\overline{s}}R_{\overline{s}}^{[n]}(z), \qquad n\geqslant 0,$$

линейные формы $R_{\overline{s}}^{[n]}(z)$, $\overline{s}\in\Theta$, $n\geqslant 0$, от функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$:

$$\begin{gathered} R_{\overline{s}}^{[n+1]}(z)=T(z)\biggl(\frac{d}{dz}R_{\overline{s}}^{[n]}(z)-\sum_{l,j=1}^m(s_j-\delta_{lj}+1)Q_{lj}(z)R_{\overline{s}-\overline{e}_l+\overline{e}_j}^{[n]}(z)\biggr),\\ \overline{s}\in\Theta, \qquad n\geqslant 0. \end{gathered} \tag{1.9}$$

Если ввести обозначение

$$t=\max\Bigl\{\deg T, \max_{1\leqslant l,j\leqslant m}\{\deg TQ_{lj}\}\Bigr\},$$

то из леммы 1.1 и соотношений (1.8), (1.9) для $n \geqslant 0$ имеем:

$$\begin{aligned} &\deg P_{\overline{\varkappa}}^{[n]} < M + tn, \qquad \overline{\varkappa} \in \Omega, \\ &\operatorname*{ord}_{z=0} R_{\overline{s}}^{[n]} \geqslant K - n, \qquad \overline{s} \in \Theta. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Для многочлена

$$g(z) = \sum_{\nu} \frac{g_\nu}{\nu!} z^\nu, \qquad g_\nu \in \mathbb{C},$$

положим

$$\|g(z)\| = \max_{\nu}\{|g_\nu|\}.$$

Лемма 1.2. *Справедливы следующие неравенства*:

а) $\|g'(z)\| \leqslant \|g(z)\|$;

б) $\|g_1(z) + g_2(z)\| \leqslant \|g_1(z)\| + \|g_2(z)\|$;

в) $\|g_1(z)g_2(z)\| \leqslant \binom{\deg g_1(z) + \deg g_2(z)}{\deg g_1(z)} \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\|$.

Доказательство свойств а) и б) тривиально.

в) Пусть

$$g_i(z) = \sum_{\nu=0}^{n_i} \frac{g_{i,\nu}}{\nu!} z^\nu, \quad i = 1, 2; \qquad h(z) = g_1(z)g_2(z) = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \frac{h_\eta}{\eta!} z^\eta.$$

Тогда

$$h(z) = \sum_{\nu=0}^{n_1} \sum_{\mu=0}^{n_2} \frac{g_{1,\nu}}{\nu!} \frac{g_{2,\mu}}{\mu!} z^{\nu+\mu} = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu} g_{1,\nu} g_{2,\mu} \frac{z^\eta}{\eta!},$$

$$\mathrm{S}_\eta = \bigl\{(\nu,\mu) : 0 \leqslant \nu \leqslant n_1,\ 0 \leqslant \mu \leqslant n_2,\ \nu + \mu = \eta\bigr\}, \quad \eta = 0, 1, \dots, n_1 + n_2,$$

откуда

$$|h_\eta| = \biggl| \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu} g_{1,\nu} g_{2,\mu} \biggr| \leqslant \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu}, \qquad \eta = 0, 1, \dots, n_1 + n_2. \tag{1.11}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{\eta}{\nu} &\leqslant \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1 + n_2 - \eta}{n_1 - \nu} \binom{\eta}{\nu} \\ &= \frac{(n_1 + n_2 - \eta)!\eta!}{n_1! n_2!} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu} \binom{n_2}{\mu}, \\ &\qquad \eta = 0, 1, \dots, n_1 + n_2. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Воспользуемся формулой для бинома Ньютона:

$$(1+z)^{n_1} = \sum_{\nu=0}^{n_1} \binom{n_1}{\nu} z^{\nu}, \qquad (1+z)^{n_2} = \sum_{\mu=0}^{n_2} \binom{n_2}{\mu} z^{\mu},$$

откуда

$$(1+z)^{n_1+n_2} = \sum_{\nu=0}^{n_1} \binom{n_1}{\nu} z^{\nu} \sum_{\mu=0}^{n_2} \binom{n_2}{\mu} z^{\mu} = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu} z^{\eta}, \tag{1.13}$$

а с другой стороны,

$$(1+z)^{n_1+n_2} = \sum_{\eta=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{\eta} z^{\eta}. \tag{1.14}$$

Сравнивая коэффициенты при z^η, $\eta = 0,1,\ldots,n_1+n_2$, в соотношениях (1.13) и (1.14), заключаем:

$$\sum_{(\nu,\mu)\in \mathrm{S}_\eta} \binom{n_1}{\nu}\binom{n_2}{\mu} = \binom{n_1+n_2}{\eta}, \qquad \eta = 0,1,\ldots,n_1+n_2. \tag{1.15}$$

Осталось подставить полученное тождество (1.15) в неравенство (1.12) и продолжить оценку (1.11):

$$\begin{aligned} |h_\eta| &\leqslant \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \frac{(n_1+n_2-\eta)!\eta!}{n_1!n_2!} \binom{n_1+n_2}{\eta} \\ &= \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\| \binom{n_1+n_2}{n_1}, \qquad \eta = 0,1,\ldots,n_1+n_2, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.3. а) *Коэффициенты в нормальном разложении многочленов* $P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)$, $\overline{\varkappa} \in \Omega$, $n \geqslant 0$, *являются целыми числами*, *и при* $n < C_1\varepsilon M$ *имеет место оценка*

$$\max_{\overline{\varkappa}\in\Omega}\bigl\{\|P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)\|\bigr\} < C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M}. \tag{1.16}$$

б) *При* $n < C_1\varepsilon M$ *справедлива оценка*

$$\bigl|R_{\overline{s}^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| < C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M} C_3^M M^{-K}, \qquad \overline{s}^* = N\overline{e}_{l^*}. \tag{1.17}$$

Доказательство. а) Первая часть утверждения вытекает из соотношений (1.8) и выбора (0.5) многочлена $T(z)$. Положим

$$C_4 = \max\Big\{\|T\|, \max_{1\leqslant l,j\leqslant m}\{\|TQ_{lj}\|\}\Big\}$$

и воспользуемся рекуррентными соотношениями (1.8) и неравенствами леммы 1.2:

$$\max_{\varkappa\in\Omega}\{\|P_{\varkappa}^{[n]}(z)\|\} \leqslant (m^2+m+1)N\binom{M+tn-1}{t}\cdot C_4\cdot\max_{\varkappa\in\Omega}\{\|P_{\varkappa}^{[n-1]}(z)\|\}, \quad n\geqslant 1,$$

откуда с помощью простой индукции по n получаем:

$$\begin{aligned}\max_{\varkappa\in\Omega}&\{\|P_{\varkappa}^{[n]}(z)\|\}\\ &\leqslant \big((m^2+m+1)N\big)^n\cdot\left(\frac{1}{t!}\right)^n\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot C_4^n\cdot\max_{\varkappa\in\Omega}\{\|P_{\varkappa}^{[0]}(z)\|\}\\ &< \left(\frac{C_4(m^2+m+1)N}{t!}\right)^n(2M)^{tn}C_0^{\omega M/\varepsilon}, \qquad n\geqslant 0.\end{aligned}$$

Осталось вспомнить, что $n<C_1\varepsilon M$.

б) Пусть $P_{\overline{s}^*,\nu}^{[n]}$, $P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*},\nu}^{[n]}$, $\nu\in\mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P_{\overline{s}^*}^{[n]}(z)$, $P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n]}(z)$, $n\geqslant 0$, соответственно; $R_{\overline{s}^*,\mu}^{[n]}$, $\mu\in\mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении линейных форм $R_{\overline{s}^*}^{[n]}(z)$, $n\geqslant 0$. Тогда, согласно формуле (1.5),

$$R_{\overline{s}^*}^{[n]}(z) = P_{\overline{s}^*}^{[n]}(z) + P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n]}(z)f_{l^*}(z), \qquad n\geqslant 0, \tag{1.18}$$

и, значит,

$$R_{\overline{s}^*,\mu}^{[n]} = P_{\overline{s}^*,\mu}^{[n]} + \sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*},\nu}^{[n]}f_{l^*,\mu-\nu}, \qquad \mu\in\mathbb{Z}^+, \quad n\geqslant 0. \tag{1.19}$$

При этом

$$R_{\overline{s}^*,\mu}^{[n]} = 0, \qquad \mu<K-n, \quad n<C_1\varepsilon M.$$

Поэтому, если в соотношении (1.19) воспользоваться оценкой (1.16) и определением $\mathbb{QE}$-функции для $f_{l^*}(z)$, то мы получим (для $\mu\geqslant K-n$):

$$\big|R_{\overline{s}^*,\mu}^{[n]}\big| \leqslant 2\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\max_{\varkappa\in\Omega}\{\|P_{\varkappa}^{[n]}(z)\|\}C^{\mu+1} < (2C)^{\mu+1}C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M},$$

откуда

$$\big|R_{\overline{s}^*}^{[n]}(\alpha)\big| = \Bigg|\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{R_{\overline{s}^*,\mu}^{[n]}}{\mu!}\alpha^\mu\Bigg| < C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{|\alpha|^\mu}{\mu!}(2C)^{\mu+1}.$$

Пользуясь неравенством

$$\begin{aligned}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{|\alpha|^\mu}{\mu!}(2C)^{\mu+1}&\leqslant\frac{|\alpha|^{K-n}(2C)^{K-n+1}}{(K-n)!}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{\bigl(2C|\alpha|\bigr)^{\mu-K+n}}{(\mu-K+n)!}\\&=\frac{|\alpha|^{K-n}(2C)^{K-n+1}}{(K-n)!}e^{2C|\alpha|}\\&<\bigl(2C|\alpha|\bigr)^{2M}\Bigl(\frac{e}{K-n}\Bigr)^{K-n}e^{2C|\alpha|}\\&<\bigl(2C|\alpha|\bigr)^{2M}\Bigl(\frac{e}{M}\Bigr)^{K}e^{2C|\alpha|}\\&<e^{2C|\alpha|}\bigl(2C|\alpha|e\bigr)^{2M}M^{-K},\end{aligned}$$

и учитывая, что $M<K-n\leqslant K<2M$, получаем:

$$\bigl|R_{\overline{s}^*}^{[n]}(\alpha)\bigr|<C_0^{\omega M/\varepsilon}M^{C_2\varepsilon M}e^{2C|\alpha|}(2C|\alpha|e)^{2M}M^{-K},$$

откуда следует (1.17).

Лемма 1.3 и равенство (1.18) означают, что рациональное число

$$-P_{\overline{s}^*}^{[n]}(\alpha)/P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n]}(\alpha)$$

для любого не слишком большого n будет достаточно хорошим приближением к числу $f_{l^*}(\alpha)$.

§ 2. Алгебраическая природа переходной матрицы

Рассмотрим матрицу

$$\bigl(x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega;\overline{s}\in\Theta},\tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}&=\delta_{\overline{\varkappa},\overline{s}}, &&\text{если } |\overline{\varkappa}|=N,\\x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}&=\sum_{j=1}^{m}\delta_{\overline{\varkappa}+\overline{e}_j,\overline{s}}y_j, &&\text{если } |\overline{\varkappa}|=N-1,\end{aligned}\tag{2.2}$$

$\overline{s}\in\Theta$, переменные $y_1,y_2,\dots,y_m$ независимы. При подстановке $y_j=f_j(z)$, $j=1,\dots,m$, матрица (2.1), согласно формуле (1.4), является матрицей перехода от строки $\bigl(P_{\overline{\varkappa}}(z)\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega}$ к строке $\bigl(R_{\overline{s}}(z)\bigr)_{\overline{s}\in\Theta}$.

Пусть задано непустое множество $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ и функции

$$\begin{aligned}&D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z)\in\mathbb{C}(z),\\&D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z)\equiv 0,\qquad \overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa},\end{aligned}\tag{2.3}$$

$\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}$, $\overline{\varkappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}$, определяют элементы матрицы

$$\bigl(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega};\overline{s}\in\Theta}\tag{2.4}$$

по формуле

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}} &= x_{\overline{\varkappa},\overline{s}} + \sum_{\overline{\varkappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}} D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}} \\ &= x_{\overline{\varkappa},\overline{s}} + \sum_{\overline{\varkappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega},\overline{\varkappa}'\succ\overline{\varkappa}} D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}}, \qquad \overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}, \quad \overline{s}\in\Theta. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Целью этого параграфа будет доказательство оценки снизу ранга матрицы (2.4), содержащейся в следующем утверждении.

Предложение 2.1. *Для любого непустого множества* $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}=\widetilde{\omega}$, *существуют множества* $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ *и* $\Theta_1\subset\Theta$, $\operatorname{Card}\Omega_1=\operatorname{Card}\Theta_1=\widetilde{\theta}$, *зависящие только от множества* $\widetilde{\Omega}$ *и не зависящие от рациональных функций* (2.3), *такие, что минор* $\det\bigl(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}$ *матрицы* (2.4) *отличен от нуля, и*

$$\begin{cases} \dfrac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \dfrac{\omega}{\theta} - \dfrac{1}{(N+m-1)\theta}, & \textit{если } \widetilde{\Omega}\neq\Omega, \\ \dfrac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \dfrac{\omega}{\theta}, & \textit{если } \widetilde{\Omega}=\Omega. \end{cases}$$

Лемма 2.2. *Пусть произвольные подмножества* $\Omega_1\subset\Omega$ *и* $\Theta_1\subset\Theta$ *выбраны так, что* $\operatorname{Card}\Omega_1=\operatorname{Card}\Theta_1$. *Тогда определитель*

$$\det(x_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}$$

как многочлен от переменных $y_1,\dots,y_m$ *является мономом мультистепени*

$$\overline{r}=\overline{r}(\Omega_1,\Theta_1)=\sum_{\overline{s}\in\Theta_1}\overline{s}-\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}\overline{\varkappa}$$

или равен нулю.

Доказательство. Требуемый определитель представляет собой сумму всевозможных произведений вида $\pm\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}x_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}$, где σ – произвольное биективное отображение множества Ω_1 на множество Θ_1. Поэтому достаточно показать, что каждое такое ненулевое произведение в точности равно $\pm\overline{y}^{\overline{r}}$. Из определения (2.2) элементов матрицы (2.1) следует, что если $x_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}\neq0$ для всех $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$, то для каждого $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$ либо $\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}$ (и тогда $x_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}=1$, $|\overline{\varkappa}|=N$), либо существует $j=j(\overline{\varkappa},\sigma)$, $1\leqslant j\leqslant m$, такой, что $\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_j$ (и тогда $x_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}=y_j$, $|\overline{\varkappa}|=N-1$). Поэтому

$$\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}x_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}=\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1,|\overline{\varkappa}|=N-1}y_{j(\overline{\varkappa},\sigma)}, \tag{2.6}$$

где произведение в правой части в случае $\Omega_1\subset\Theta$ считаем равным 1. Сложим равенства

$$\sigma(\overline{\varkappa})=\begin{cases}\overline{\varkappa}, & \text{если } |\overline{\varkappa}|=N,\\ \overline{\varkappa}+\overline{e}_{j(\overline{\varkappa},\sigma)}, & \text{если } |\overline{\varkappa}|=N-1,\end{cases} \qquad \overline{\varkappa}\in\Omega_1, \tag{2.7}$$

по всевозможным $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$ и воспользуемся тем, что $\sigma\colon\Omega_1\to\Theta_1$ есть биекция:

$$\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1,|\overline{\varkappa}|=N-1}\overline{e}_{j(\overline{\varkappa},\sigma)}=\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}\sigma(\overline{\varkappa})-\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}\overline{\varkappa}=\sum_{\overline{s}\in\Theta_1}\overline{s}-\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}\overline{\varkappa}=\overline{r},$$

а это означает, что

$$\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1,|\overline{\varkappa}|=N-1}y_{j(\overline{\varkappa},\sigma)}=\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1,|\overline{\varkappa}|=N-1}\overline{y}^{\overline{e}_{j(\overline{\varkappa},\sigma)}}=\overline{y}^{\overline{r}}.$$

Сопоставляя это равенство с (2.6), получаем требуемое утверждение.

Замечание. Из доказательства леммы 2.2 следует, что величина

$$\operatorname{Card}\bigl\{\overline{\varkappa}\in\Omega_1:\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_j\bigr\}=r_j$$

зависит только от множеств Ω_1, Θ_1, и не зависит от биективного отображения $\sigma\colon\Omega_1\to\Theta_1$ вида (2.7).

Лемма 2.3. *Пусть заданы множество* $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, *рациональные функции* (2.3); *произвольные множества* $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ *и* $\Theta_1\subset\Theta$ *таковы, что* $\operatorname{Card}\Omega_1=\operatorname{Card}\Theta_1$. *Тогда если* $\det(x_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}\ne0$, *то и* $\det(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}\ne0$.

Доказательство. Перепишем соотношение (2.5) в виде

$$\bigl(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega};\overline{s}\in\Theta}=\bigl(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega};\overline{\varkappa}'\in\Omega}\bigl(x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}'\in\Omega;\overline{s}\in\Theta},$$

где

$$\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}=\begin{cases}\delta_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}, & \text{если } \overline{\varkappa}'\in\widetilde{\Omega},\\ D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}, & \text{если } \overline{\varkappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega},\end{cases}\qquad \overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega},\tag{2.8}$$

и воспользуемся формулой Бине–Коши [11, с. 17]:

$$\begin{aligned}\det\bigl(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}\\ =\sum_{\Omega'\subset\Omega:\operatorname{Card}\Omega'=\operatorname{Card}\Omega_1}\det\bigl(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega'}\det\bigl(x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}'\in\Omega';\overline{s}\in\Theta_1}.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Согласно лемме 2.2 каждый отличный от нуля определитель $\det\bigl(x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}'\in\Omega';\overline{s}\in\Theta_1}$ является произведением степеней переменных $y_1,\dots,y_m$. Покажем, что определитель, отвечающий множеству $\Omega'=\Omega_1$ (отличный от нуля по условию), имеет наибольшую мультистепень среди всех других ненулевых определителей такого вида, а коэффициент при нем в сумме (2.9) равен 1. Отсюда и будет следовать утверждение леммы 2.3.

Рассмотрим каждое ненулевое слагаемое суммы (2.9). Пусть Ω' – произвольное подмножество Ω, $\operatorname{Card}\Omega'=\operatorname{Card}\Omega_1$, такое, что $\det\bigl(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega'}\ne0$.

Если $\Omega'=\Omega_1$, то

$$\det\bigl(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega'}=\det\bigl(\delta_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega_1}=1.$$

Если же $\Omega' \neq \Omega_1$, то $\widetilde{\Omega}' = \Omega' \cap \widetilde{\Omega} \subset \Omega_1$. Действительно, в противном случае существует мультииндекс $\overline{\varkappa}' \in \widetilde{\Omega}' \subset \widetilde{\Omega}$ такой, что $\overline{\varkappa}' \notin \Omega_1$. Тогда для любого $\overline{\varkappa} \in \Omega_1$ имеем $\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} = \delta_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} = 0$, и значит, $\det\big(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\big)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega'} = 0$. Итак, $\widetilde{\Omega}' \subset \Omega_1$.

Последовательно раскладывая определитель матрицы $(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega'}$ по строкам с номерами $\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}' \subset \widetilde{\Omega}$, согласно (2.8) получим с точностью до знака определитель

$$\det\big(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\big)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\overline{\varkappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} = \det\big(D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\big)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\overline{\varkappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}.$$

Поскольку $\Omega' \neq \Omega_1$, то $\mu = \mathrm{Card}(\Omega_1 \setminus \widetilde{\Omega}') = \mathrm{Card}(\Omega' \setminus \widetilde{\Omega}') \geqslant 1$. Упорядочим элементы множеств в лексикографическом порядке:

$$\Omega_1 \setminus \widetilde{\Omega}' = \{\overline{\varkappa}^{(1)}, \dots, \overline{\varkappa}^{(\mu)}\}, \qquad \overline{\varkappa}^{(1)} \prec \dots \prec \overline{\varkappa}^{(\mu)},$$
$$\Omega' \setminus \widetilde{\Omega}' = \{\overline{r}^{(1)}, \dots, \overline{r}^{(\mu)}\}, \qquad \overline{r}^{(1)} \prec \dots \prec \overline{r}^{(\mu)}.$$

Если для некоторого ν, $1 \leqslant \nu \leqslant \mu$, выполнено $\overline{r}^{(\nu)} \prec \overline{\varkappa}^{(\nu)}$, то согласно (2.3)

$$D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} = 0, \qquad \overline{\varkappa} \in \{\overline{\varkappa}^{(\nu)}, \dots, \overline{\varkappa}^{(\mu)}\}, \quad \overline{\varkappa}' \in \{\overline{r}^{(1)}, \dots, \overline{r}^{(\nu)}\}.$$

Это означает, что первые ν столбцов матрицы $\big(D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\big)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\overline{\varkappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'}$ линейно зависимы, что невозможно ввиду условия

$$\det\big(D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\big)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}';\overline{\varkappa}'\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} = \pm\det\big(\widetilde{D}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}\big)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{\varkappa}'\in\Omega'} \neq 0.$$

Поэтому $\overline{r}^{(\nu)} \succ \overline{\varkappa}^{(\nu)}$ для всех $\nu = 1, \dots, \mu$, и, в частности,

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \overline{r}^{(\nu)} \succ \sum_{\nu=1}^{\mu} \overline{\varkappa}^{(\nu)}$$

или

$$\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega'\setminus\widetilde{\Omega}'} \overline{\varkappa} \succ \sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\widetilde{\Omega}'} \overline{\varkappa}.$$

Таким образом, любому ненулевому слагаемому в сумме (2.9), соответствует либо множество $\Omega' = \Omega_1$ либо множество Ω', для которого

$$\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega'} \overline{\varkappa} \succ \sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1} \overline{\varkappa}.$$

Но последнее условие согласно лемме 2.2 означает, что мультистепень соответствующего множествам Ω', Θ_1 монома младше мультистепени монома, соответствующего множествам Ω_1, Θ_1. Следовательно, в многочлене $\det(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}$ от переменных $y_1, \dots, y_m$ присутствует по крайней мере один моном с ненулевым коэффициентом. Это завершает доказательство.

Рассмотрим пары (Ω_1, σ), где $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и $\sigma\colon \Omega_1 \to \Theta$, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\mathrm{Card}\,\sigma(\Omega_1) = \mathrm{Card}\,\Omega_1$, т.е. σ – биекция множеств Ω_1 и $\sigma(\Omega_1)$,
2) отображение $\sigma\colon \Omega_1 \to \Theta$ имеет вид (2.7),
3) если $\overline{\varkappa} \in \Omega_1$ и $\overline{\varkappa} + \overline{e}_j \prec \sigma(\overline{\varkappa})$, то $\overline{\varkappa} + \overline{e}_j \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\overline{\varkappa} + \overline{e}_j) \succ \overline{\varkappa}$.

Лемма 2.4. *Если* $\widetilde{\Omega} \ne \varnothing$, *то пары* (Ω_1,σ), *удовлетворяющие условиям* 1)–3), *существуют.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи, когда $\widetilde{\Omega}\cap\Theta \ne \varnothing$ и когда $\widetilde{\Omega}\cap\Theta = \varnothing$. В первом случае возьмем произвольный элемент $\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}\cap\Theta$ и положим $\sigma(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}$, во втором – произвольный элемент $\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}$ и положим $\sigma(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_m \in \Theta$. Тогда пара $(\{\overline{\varkappa}\},\sigma)$, очевидно, удовлетворяет условиям 1) и 2). Кроме того, не существует j, $1\leqslant j\leqslant m$, такого, что $\overline{\varkappa}+\overline{e}_j \prec \sigma(\overline{\varkappa})$. Поэтому условие 3) также выполнено для указанной пары.

Лемма 2.5. *Пусть множество* $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ *и отображение* $\sigma\colon \Omega_1\to\Theta$ *удовлетворяют условиям* 1)–3). *Тогда любое биективное отображение множества* Ω_1 *в* $\sigma(\Omega_1)$ *вида* (2.7) *совпадает с* σ.

Доказательство. Пусть σ' – произвольная биекция множества Ω_1 в $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$ вида (2.7). Тогда если $\overline{\varkappa}\in\Omega_1\cap\Theta$, то $\sigma'(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa} = \sigma(\overline{\varkappa})$. Поэтому, если $\sigma'(\overline{\varkappa}) \ne \sigma(\overline{\varkappa})$, то $\overline{\varkappa}\in\Omega_1\backslash\Theta$. Предположим, что существуют элементы $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$, для которых $\sigma'(\overline{\varkappa})\ne\sigma(\overline{\varkappa})$. Пусть j', $1\leqslant j'\leqslant m$, – наибольший номер, для которого существует $\overline{\varkappa}'\in\Omega_1$ с условием $\sigma'(\overline{\varkappa}') = \overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j'} \ne \sigma(\overline{\varkappa}')$. Как было отмечено в замечании к лемме 2.2,

$$\operatorname{Card}\{\overline{\varkappa}\in\Omega_1 : \sigma'(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_j\} = \operatorname{Card}\{\overline{\varkappa}\in\Omega_1 : \sigma(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_j\}.$$

Из условия $\sigma'(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_j$, $j'<j\leqslant m$, в силу выбора j' вытекает, что $\sigma'(\overline{\varkappa}) = \sigma(\overline{\varkappa})$. Так что множества $\{\overline{\varkappa}\in\Omega_1 : \sigma'(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_j\}$ и $\{\overline{\varkappa}\in\Omega_1 : \sigma(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_j\}$, $j'<j\leqslant m$, совпадают, и значит, если $\sigma(\overline{\varkappa}) = \overline{\varkappa}+\overline{e}_j$ при $j'<j\leqslant m$, то $\sigma(\overline{\varkappa}) = \sigma'(\overline{\varkappa})$. Поэтому из условия $\sigma'(\overline{\varkappa}') = \overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j'} \ne \sigma(\overline{\varkappa}') = \overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j_1}$ вытекает, что $j_1<j'$. Кроме того, если $\overline{r}\in\Omega_1$ таково, что $\sigma'(\overline{\varkappa}') = \sigma(\overline{r}) = \overline{r}+\overline{e}_{j_2}$, то $j_2<j'$. В противном случае $\sigma(\overline{r}) = \sigma'(\overline{r})$ и поскольку σ' – биекция, имеем $\overline{\varkappa}' = \overline{r}$ и $\sigma'(\overline{\varkappa}') = \sigma(\overline{\varkappa}')$, что противоречит выбору элемента $\overline{\varkappa}'\in\Omega_1$. Воспользуемся тем, что $\overline{e}_{j'}\prec\overline{e}_{j_1}$ и $\overline{e}_{j'}\prec\overline{e}_{j_2}$:

$$\begin{gathered}\overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j'} \prec \overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j_1} = \sigma(\overline{\varkappa}'),\\ \sigma^{-1}(\overline{\varkappa}+\overline{e}_{j'}) = \sigma^{-1}(\sigma'(\overline{\varkappa}')) = \overline{r} = \sigma'(\overline{\varkappa}')-\overline{e}_{j_2} = \overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j'}-\overline{e}_{j_2} \prec \overline{\varkappa}',\end{gathered}$$

а это противоречит условию 3), справедливому для пары (Ω_1,σ) при $\overline{\varkappa} = \overline{\varkappa}'$. Полученное противоречие доказывает, что $\sigma'(\overline{\varkappa}) = \sigma(\overline{\varkappa})$ для всех $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$.

Пусть

$$\widetilde{\theta} = \max_{(\Omega_1,\sigma)}\{\operatorname{Card}\Omega_1\},$$

где максимум берется по всевозможным парам (Ω_1,σ), $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$, удовлетворяющим условиям 1)–3). Среди всех таких пар (Ω_1,σ), $\operatorname{Card}\Omega_1 = \widetilde{\theta}$, выберем ту, для которой величина

$$\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}\bigl(\sigma(\overline{\varkappa})-\overline{\varkappa}\bigr)$$

минимальна (в смысле лексикографического порядка), и зафиксируем ее. Для выбранной таким образом пары (Ω_1,σ) положим $\Theta_1 = \sigma(\Omega_1)$, $\Omega_2 = \widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1$.

Лемма 2.6. *Справедливо следующее утверждение*:

$$\bigcup_{j=1}^{m}(\Omega_2+\overline{e}_j)\subset\Theta_1.$$

(Здесь мы полагаем $\Omega_2+\overline{e}_j=\{\overline{\varkappa}+\overline{e}_j:\overline{\varkappa}\in\Omega_2\}$, $j=1,\dots,m$.)

Доказательство. Прежде всего докажем, что $\Omega_2\cap\Theta=\varnothing$, точнее, что если $\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}\cap\Theta$, то $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$. Если это не выполнено, т.е. некоторый элемент $\overline{\varkappa}^*\in\widetilde{\Omega}\cap\Theta$ не лежит в Ω_1, то существует пара (Ω_1^*,σ^*), где $\Omega_1^*=\Omega_1\cup\{\overline{\varkappa}^*\}$,

$$\sigma^*(\overline{\varkappa})=\begin{cases}\sigma(\overline{\varkappa}), & \text{если } \overline{\varkappa}\in\Omega_1,\\ \overline{\varkappa}^*, & \text{если } \overline{\varkappa}=\overline{\varkappa}^*,\end{cases}$$

удовлетворяющая условиям 1)–3), но $\operatorname{Card}\Omega_1^*>\operatorname{Card}\Omega_1$. Это противоречит выбору пары (Ω_1,σ). Поэтому $\Omega_2\cap\Theta=\varnothing$ и, значит,

$$\bigcup_{j=1}^{m}(\Omega_2+\overline{e}_j)\subset\Theta.$$

Предположим теперь существование j, $1\leqslant j\leqslant m$, такого, что $\Omega_2+\overline{e}_j\not\subset\Theta_1$, и среди всех таких j выберем максимальное j^*. Это означает, что для некоторого $\overline{\varkappa}^*\in\Omega_2$ выполнено $\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_{j^*}\notin\Theta_1$. Кроме того, $\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j\in\Theta_1=\sigma(\Omega_1)$ для всех j, $j^*<j\leqslant m$, т.е. для таких j, что $\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j\prec\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_{j^*}$. Покажем, что $\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j)\succ\overline{\varkappa}^*$ для всех таких j.

Если это не так, то выберем максимальное j такое, что $\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j\prec\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_{j^*}$ и $\overline{\varkappa}'=\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j)\prec\overline{\varkappa}^*$. Если $\sigma(\overline{\varkappa}')=\overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j'}$, то

$$\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j-\overline{e}_{j'}=\overline{\varkappa}'=\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j)\prec\overline{\varkappa}^*,$$

откуда $\overline{e}_j\prec\overline{e}_{j'}$. Рассмотрим пару (Ω_1^*,σ^*), где $\Omega_1^*=(\Omega_1\setminus\{\overline{\varkappa}'\})\cup\{\overline{\varkappa}^*\}$ и

$$\sigma^*(\overline{\varkappa})=\begin{cases}\sigma(\overline{\varkappa}), & \text{если } \overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\{\overline{\varkappa}'\}=\Omega_1^*\setminus\{\overline{\varkappa}^*\},\\ \overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j=\sigma(\overline{\varkappa}'), & \text{если } \overline{\varkappa}=\overline{\varkappa}^*.\end{cases}$$

Для нее, очевидно, справедливы условия 1), 2). В силу выбора j условие 3) выполнено при $\overline{\varkappa}^*\in\Omega_1^*$. Поскольку $\sigma(\Omega_1)=\sigma^*(\Omega_1^*)$ и

$$(\sigma^*)^{-1}(\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j)=\overline{\varkappa}^*\succ\overline{\varkappa}'=\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}^*+\overline{e}_j)=\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}'+\overline{e}_{j'}),$$

то условие 3) справедливо и при любом $\overline{\varkappa}\in\Omega_1^*\setminus\{\overline{\varkappa}^*\}=\Omega_1\setminus\{\overline{\varkappa}'\}$. Итак, пара (Ω_1^*,σ^*) удовлетворяет условиям 1)–3) и

$$\begin{aligned}\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1^*}\bigl(\sigma^*(\overline{\varkappa})-\overline{\varkappa}\bigr)&=\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1^*\setminus\{\overline{\varkappa}^*\}}\bigl(\sigma^*(\overline{\varkappa})-\overline{\varkappa}\bigr)+\bigl(\sigma^*(\overline{\varkappa}^*)-\overline{\varkappa}^*\bigr)\\ &=\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\{\overline{\varkappa}'\}}\bigl(\sigma(\overline{\varkappa})-\overline{\varkappa}\bigr)+\overline{e}_j\\ &\prec\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1\setminus\{\overline{\varkappa}'\}}\bigl(\sigma(\overline{\varkappa})-\overline{\varkappa}\bigr)+\overline{e}_{j'}\\ &=\sum_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1}\bigl(\sigma(\overline{\varkappa})-\overline{\varkappa}\bigr),\end{aligned}$$

а это противоречит выбору пары (Ω_1, σ).

Таким образом, мы получили, что $\overline{\varkappa}^* \notin \Omega_1$, $\overline{\varkappa}^* + \overline{e}_{j^*} \notin \sigma(\Omega_1)$ и если $\overline{\varkappa}^* + \overline{e}_j \prec \overline{\varkappa}^* + \overline{e}_{j^*}$, то $\overline{\varkappa}^* + \overline{e}_j \in \sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}^* + \overline{e}_j) \succ \overline{\varkappa}^*$. Поэтому пара (Ω_1^*, σ^*), где $\Omega_1^* = \Omega_1 \cup \{\overline{\varkappa}^*\}$,

$$\sigma^*(\overline{\varkappa}) = \begin{cases} \sigma(\overline{\varkappa}), & \text{если } \overline{\varkappa} \in \Omega_1, \\ \overline{\varkappa}^* + \overline{e}_{j^*}, & \text{если } \overline{\varkappa} = \overline{\varkappa}^*, \end{cases}$$

удовлетворяет условиям 1)–3), в то время как $\operatorname{Card}\Omega_1^* > \operatorname{Card}\Omega_1$. Это противоречит выбору пары (Ω_1, σ). Следовательно, $\Omega_2 + \overline{e}_j \subset \Theta_1$ для всех j, $1 \leqslant j \leqslant m$, что и требовалось доказать.

Лемма 2.7. *Для произвольных множеств A, B и любого вещественного β, $0 < \beta < 1$, имеет место неравенство*

$$\operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \beta \operatorname{Card} A + (1-\beta) \operatorname{Card} B;$$

оно превращается в равенство тогда и только тогда , когда множества A и B совпадают.

Доказательство. Если умножить первое из очевидных неравенств

$$\operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \operatorname{Card} A, \qquad \operatorname{Card}(A \cup B) \geqslant \operatorname{Card} B, \tag{2.10}$$

на β, а второе – на $(1-\beta)$ и сложить, то получим требуемое неравенство. Неравенства (2.10) превращаются в равенства только в случае $A \cup B = A$ и $A \cup B = B$.

Лемма 2.8. *Для натуральных чисел $m \geqslant 1$, $N \geqslant 1$ пусть Ω_2 – произвольное подмножество $\{\overline{\varkappa} : \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m = N-1\}$ и*

$$\Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \overline{e}_j) \subset \{\overline{\varkappa} : \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m = N\}.$$

Тогда

$$\operatorname{Card}\Theta_2 \geqslant \frac{N+m-1}{N} \operatorname{Card}\Omega_2, \tag{2.11}$$

причем равенство имеет место лишь в одном из трех случаев: $m = 1$, $\Omega_2 = \varnothing$ или $\Omega_2 = \{\overline{\varkappa} : \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m = N-1\}$.

Доказательство. В случае $m = 1$ имеем очевидное равенство $\operatorname{Card}\Theta_2 = \operatorname{Card}\Omega_2$. Поэтому пусть $m \geqslant 2$ и для $m-1$ утверждение леммы доказано. Разобьем множество Ω_2 (даже если оно пустое) на непересекающиеся подмножества

$$\Omega_2^{(\nu)} = \{\overline{\varkappa} \in \Omega_2 : \varkappa_1 + \dots + \varkappa_{m-1} = \nu\}, \qquad \nu = 0, 1, \dots, N-1, \tag{2.12}$$

и положим

$$\Theta_2^{(\nu)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} (\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_j), \qquad \nu = 0, 1, \dots, N-1. \tag{2.13}$$

Тогда

$$\Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \overline{e}_j) = \bigcup_{j=1}^{m} \bigcup_{\nu=0}^{N-1} (\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_j) = \bigcup_{\nu=0}^{N-1} \big(\Theta_2^{(\nu)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_m)\big)$$
$$= \big[\Omega_2^{(0)} + \overline{e}_m\big] \cup \bigcup_{\nu=1}^{N-1} \big[\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_m)\big] \cup \big[\Theta_2^{(N-1)}\big].$$

Множества в квадратных скобках не пересекаются, так как каждое из них характеризуется своей суммой первых $m-1$ координат входящих мультииндексов. Поэтому

$$\operatorname{Card} \Theta_2 = \operatorname{Card} \Omega_2^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \operatorname{Card}\big(\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_m)\big) + \operatorname{Card} \Theta_2^{(N-1)}. \quad (2.14)$$

Согласно лемме 2.7 имеем:

$$\operatorname{Card}\big(\Theta_2^{(\nu-1)} \cup (\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_m)\big) \geqslant \frac{\nu}{N} \operatorname{Card} \Theta_2^{(\nu-1)} + \frac{N-\nu}{N} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)}, \quad \nu = 0, 1, \dots, N-1, \quad (2.15)$$

что дает возможность переписать (2.14) в виде

$$\operatorname{Card} \Theta_2 \geqslant \operatorname{Card} \Omega_2^{(0)} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \left(\frac{\nu}{N} \operatorname{Card} \Theta_2^{(\nu-1)} + \frac{N-\nu}{N} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)}\right) + \operatorname{Card} \Theta_2^{(N-1)}$$
$$= \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(\frac{\nu+1}{N} \operatorname{Card} \Theta_2^{(\nu)} + \frac{N-\nu}{N} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)}\right). \quad (2.16)$$

Осталось воспользоваться предположением индукции для множеств (2.12)–(2.13):

$$\operatorname{Card} \Theta_2^{(\nu)} \geqslant \frac{\nu+m-1}{\nu+1} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)}, \qquad \nu = 0, 1, \dots, N-1,$$

и неравенство (2.16) примет требуемый вид:

$$\operatorname{Card} \Theta_2 \geqslant \sum_{\nu=0}^{N-1} \left(\frac{\nu+1}{N} \cdot \frac{\nu+m-1}{\nu+1} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)} + \frac{N-\nu}{N} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)}\right)$$
$$= \frac{N+m-1}{N} \sum_{\nu=0}^{N-1} \operatorname{Card} \Omega_2^{(\nu)} = \frac{N+m-1}{N} \operatorname{Card} \Omega_2.$$

Это неравенство становится равенством, если каждое из неравенств (2.15) превращается в равенство, т.е. если

$$\Omega_2^{(\nu)} + \overline{e}_m = \Theta_2^{(\nu-1)} = \bigcup_{j=1}^{m-1} (\Omega_2^{(\nu-1)} + \overline{e}_j), \qquad \nu = 1, \dots, N-1. \quad (2.17)$$

Если $\Omega_2^{(0)} \neq \varnothing$, т.е. $\Omega_2^{(0)} = \{(0, \dots, 0, N-1)\}$, то индукцией по $\nu = 1, \dots, N-1$ с помощью (2.17) легко устанавливаем, что $\Omega_2^{(\nu)} = \{\overline{\varkappa} : \varkappa_1 + \dots + \varkappa_{m-1} = \nu\}$. Если же $\Omega_2^{(0)} = \varnothing$, то индукцией по $\nu = 1, \dots, N-1$ с помощью (2.17) устанавливаем, что $\Omega_2^{(\nu)} = \varnothing$. Поэтому (2.11) становится при $m \geqslant 2$ равенством только в случае, когда Ω_2, являющееся объединением множеств (2.12), либо совпадает с $\{\overline{\varkappa} : \varkappa_1 + \dots + \varkappa_m = N-1\}$, либо пусто.

Доказательство предложения 2.1. Выберем множество $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и отображение $\sigma\colon \Omega_1 \to \Theta$, как это было проделано перед леммой 2.6, и положим

$$\Theta_1 = \sigma(\Omega_1), \qquad \Omega_2 = \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_1, \qquad \Theta_2 = \bigcup_{j=1}^{m} (\Omega_2 + \overline{e}_j).$$

Поскольку $\sigma\colon \Omega_1 \to \Theta_1$ – единственное биективное отображение множества Ω_1 во множество Θ_1, то

$$\det\bigl(x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0,$$

откуда и из леммы 2.3

$$\det\bigl(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1} \not\equiv 0.$$

Если $\Omega_2 = \varnothing$ или $\Omega_1 = \widetilde{\Omega}$, то

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} = 1 < 1 + \frac{N}{N+m-1}.$$

Если же $\Omega_2 \ne \varnothing$, то $\Theta_2 \ne \varnothing$, и значит, $\operatorname{Card}\Theta_2 > 0$. В силу леммы 2.6 имеем $\Theta_2 \subset \Theta_1$, откуда $\operatorname{Card}\Theta_2 \leqslant \operatorname{Card}\Theta_1$. Согласно лемме 2.8 получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} &= \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1 + \operatorname{Card}\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} = \frac{\operatorname{Card}\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1} + \frac{\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}{\operatorname{Card}\Theta_1}\\ &= 1 + \frac{\operatorname{Card}\Omega_2}{\operatorname{Card}\Theta_1} \leqslant 1 + \frac{\operatorname{Card}\Omega_2}{\operatorname{Card}\Theta_2} \leqslant 1 + \frac{N}{N+m-1},\end{aligned}$$

причем

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = 1 + \frac{N}{N+m-1} = \frac{\omega}{\theta}$$

только в случае $\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1 = \Omega_2 = \{\overline{\varkappa} : |\overline{\varkappa}| = N-1\}$, т.е. $\Omega_1 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ или $\widetilde{\Omega} = \Omega = \{\overline{\varkappa} : |\overline{\varkappa}| \in \{N-1, N\}\}$.

Таким образом, если $\widetilde{\Omega} \ne \Omega$, то

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} < 1 + \frac{N}{N+m-1} = \frac{2N+m-1}{N+m-1} = \frac{\omega}{\theta}.$$

Последнее означает, что $(2N+m-1)\widetilde{\theta} - (N+m-1)\widetilde{\omega} \geqslant 1$, и, поскольку $\widetilde{\theta} \leqslant \operatorname{Card}\Theta = \theta$, имеем:

$$\frac{\omega}{\theta} - \frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} = \frac{(2N+m-1)\widetilde{\theta} - (N+m-1)\widetilde{\omega}}{(N+m-1)\widetilde{\theta}} \geqslant \frac{1}{(N+m-1)\theta}.$$

Предложение 2.1 доказано полностью.

§ 3. Доказательство основной теоремы

Пусть $a_1, \dots, a_m$ – произвольное решение системы

$$\frac{d}{dz} a_j = -\sum_{l=1}^{m} Q_{lj} a_l, \qquad j = 1, \dots, m, \tag{3.1}$$

$y_1, \dots, y_m$ – произвольное решение системы (0.1). Тогда набор функций

$$x_{\overline{\varkappa}} = \overline{a}^{\overline{\varkappa}} (1 + a_1 y_1 + \dots + a_m y_m)^{N - |\overline{\varkappa}|}, \qquad \overline{\varkappa} \in \Omega,$$

удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} x_{\overline{\varkappa}} = -\sum_{l,j=1}^{m} \varkappa_j Q_{lj} x_{\overline{\varkappa} - \overline{e}_j + \overline{e}_l} + \bigl(N - |\overline{\varkappa}|\bigr) \sum_{l=1}^{m} Q_{l0} x_{\overline{\varkappa} + \overline{e}_l}, \qquad \overline{\varkappa} \in \Omega, \tag{3.2}$$

порядка ω. Через $\beta \in \mathbb{C}$ обозначим точку, отличную от полюсов рациональных функций Q_{lj}, $l = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$ (поскольку $Q_{lj} \in \mathbb{Q}(z)$, $l = 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, m$, в качестве β можно взять любое трансцендентное число, например, $\beta = e$). Согласно теореме существования для дифференциальных уравнений найдется фундаментальная матрица решений $(\varphi_{lj})_{l,j=1,\dots,m}$ однородной системы (3.1) и частное решение $(\gamma_l)_{l=1,\dots,m}$ неоднородной системы (0.1) такие, что

$$\varphi_{lj}\big|_{z=\beta} = \delta_{lj}, \quad \gamma_l\big|_{z=\beta} = 1, \qquad l, j = 1, \dots, m.$$

Положим, кроме того,

$$\psi_j = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{lj} \gamma_l, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Тогда

$$\psi_j\big|_{z=\beta} = \sum_{l=1}^{m} \varphi_{lj}\big|_{z=\beta} \cdot \gamma_l\big|_{z=\beta} = 1, \qquad j = 1, \dots, m.$$

Лемма 3.1. *Элементы произвольной фундаментальной матрицы решений системы* (3.2) *являются многочленами от*

$$\varphi_{lj}, \quad \psi_j, \qquad l, j = 1, \dots, m, \tag{3.3}$$

степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$.

Доказательство достаточно провести для одной фундаментальной матрицы решений, так как любая другая выражается через нее умножением на матрицу с элементами из $\mathbb{C}$.

Общее решение $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_m)$ системы (3.1) может быть представлено в виде

$$a_l = \rho_1\varphi_{l1} + \cdots + \rho_m\varphi_{lm}, \qquad l = 1, \ldots, m,$$

где $\rho_1, \ldots, \rho_m$ – произвольные числа из $\mathbb{C}$. Тогда

$$a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m = \sum_{l,j=1}^{m} \rho_j\varphi_{lj}\gamma_l = \rho_1\psi_1 + \cdots + \rho_m\psi_m,$$

и набор функций

$$\begin{aligned}
&\overline{a}^{\overline{\varkappa}}(1 + a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m)^{N-|\overline{\varkappa}|} \\
&\quad= \prod_{l=1}^{m}(\rho_1\varphi_{l1} + \cdots + \rho_m\varphi_{lm})^{\varkappa_l}(1 + \rho_1\psi_1 + \cdots + \rho_m\psi_m)^{N-|\overline{\varkappa}|} \\
&\quad= \sum_{\overline{r}\in\Omega} \overline{\rho}^{\overline{r}} u_{\overline{\varkappa},\overline{r}}, \qquad \overline{\varkappa} \in \Omega,
\end{aligned}$$

при любых значениях $\rho_1, \ldots, \rho_m$ составляет решение системы (3.2). Это означает, что для каждого $\overline{r} \in \Omega$ вектор $(u_{\overline{\varkappa},\overline{r}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega}$ размерности ω удовлетворяет системе (3.2). Тем самым мы получили ω решений этой системы.

Покажем, что $\det(u_{\overline{\varkappa},\overline{r}})_{\overline{\varkappa},\overline{r}\in\Omega} \not\equiv 0$. Для этого посчитаем значение этого определителя в точке $z = \beta$. Имеем:

$$\begin{aligned}
\sum_{\overline{r}\in\Omega} \overline{\rho}^{\overline{r}} u_{\overline{\varkappa},\overline{r}}\big|_{z=\beta} &= \prod_{l=1}^{m}\bigl(\rho_1\varphi_{l1}\big|_{z=\beta} + \cdots + \rho_m\varphi_{lm}\big|_{z=\beta}\bigr)^{\varkappa_l} \\
&\qquad\times \bigl(1 + \rho_1\psi_1\big|_{z=\beta} + \cdots + \rho_m\psi_m\big|_{z=\beta}\bigr)^{N-|\overline{\varkappa}|} \\
&= \overline{\rho}^{\overline{\varkappa}}(1 + \rho_1 + \cdots + \rho_m)^{N-|\overline{\varkappa}|}, \qquad \overline{\varkappa} \in \Omega.
\end{aligned}$$

Поэтому для всех $\overline{r} \prec \overline{\varkappa}$ выполнено $u_{\overline{\varkappa},\overline{r}}\big|_{z=\beta} = 0$, а, кроме того, $u_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}}\big|_{z=\beta} = 1$, $\overline{\varkappa} \in \Omega$. Таким образом, числовая матрица $(u_{\overline{\varkappa},\overline{r}}\big|_{z=\beta})_{\overline{\varkappa},\overline{r}\in\Omega}$ имеет треугольный вид, причем на ее диагонали стоят единицы. Следовательно, ее определитель $\det(u_{\overline{\varkappa},\overline{r}})_{\overline{\varkappa},\overline{r}\in\Omega}\big|_{z=\beta} = 1$. Но отсюда вытекает, что матрица $(u_{\overline{\varkappa},\overline{r}})_{\overline{\varkappa},\overline{r}\in\Omega}$ является фундаментальной матрицей решений системы (3.2). Ее элементы $u_{\overline{\varkappa},\overline{r}}$, $\overline{\varkappa}, \overline{r} \in \Omega$, являются многочленами от функций (3.3) степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Пусть $\varphi_1(z), \ldots, \varphi_W(z)$ – совокупность функций, аналитических в некоторой области; функции $\lambda_0(z) \not\equiv 0$, $\lambda_1(z), \ldots, \lambda_L(z)$ являются многочленами от $\varphi_1, \ldots, \varphi_W$ степени не выше n с коэффициентами из $\mathbb{C}$, причем*

$$D_l(z) = \frac{\lambda_l(z)}{\lambda_0(z)} \in \mathbb{C}(z), \qquad l = 1, \ldots, L. \tag{3.4}$$

Тогда для рациональных функций (3.4) справедливо представление

$$D_l(z) = \frac{B_l(z)}{B_0(z)}, \qquad l = 1, \ldots, L, \quad B_l \in \mathbb{C}[z], \quad \deg B_l \leqslant C_5 n, \quad l = 0, 1, \ldots, L,$$

где постоянная C_5 зависит только от функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_W$.

Доказательство. Рассмотрим кольцо $\mathbb{C}(z)[\varphi_1,\dots,\varphi_W]$ и выберем в нем максимальное количество алгебраически независимых над $\mathbb{C}(z)$ элементов $\xi_1,\dots,\xi_w$ и обозначим буквой d степень алгебраического расширения $\mathbb{C}(z,\varphi_1,\dots,\varphi_W)\supset\mathbb{C}(z,\xi_1,\dots,\xi_w)$. Через $\mu_1,\dots,\mu_d$ обозначим базис поля $\mathbb{C}(z,\varphi_1,\dots,\varphi_W)$ над $\mathbb{C}(z,\xi_1,\dots,\xi_w)$. Повторяя рассуждения работы [12, с. 274–275], представим функции $\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_L$ в виде

$$\lambda_l=\frac{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{li}\mu_i}{a^n},$$
$$b_{li}\in\mathbb{C}[z,\xi_1,\dots,\xi_w],\quad \deg_z b_{li}\leqslant C_5 n,\quad i=1,\dots,d,\quad l=0,1,\dots,L,$$

где многочлен $a\in\mathbb{C}[z,\xi_1,\dots,\xi_w]$ и постоянная C_5 зависят только от функций $\varphi_1,\dots,\varphi_W$. Тогда

$$D_l=\frac{a^n\lambda_l}{a^n\lambda_0}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{li}\mu_i}{\sum\limits_{i=1}^{d} b_{0i}\mu_i},\qquad l=1,\dots,L,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^{d}\mu_i(D_l b_{0i}-b_{li})=0,\qquad l=1,\dots,L,$$

или

$$D_l b_{0i}-b_{li}=0,\qquad i=1,\dots,d,\quad l=1,\dots,L,$$

ввиду линейной независимости $\mu_1,\dots,\mu_d$ над $\mathbb{C}(z,\xi_1,\dots,\xi_w)$. Поскольку $\lambda_0\neq 0$, для некоторого i, $1\leqslant i\leqslant d$, выполнено $b_{0i}\neq 0$. Не ограничивая общности можно считать, что $b_{01}\neq 0$. Как вытекает из последнего равенства,

$$D_l=\frac{b_{l1}}{b_{01}},\qquad l=1,\dots,L.$$

Многочлены b_{l1}, $l=0,1,\dots,L$, являются линейными комбинациями произведений степеней $\xi_1,\dots,\xi_w$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и, поскольку $\xi_1,\dots,\xi_w$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, а $D_1,\dots,D_L\in\mathbb{C}(z)$, функции (3.4) запишутся в требуемом виде

$$D_l=\frac{B_l}{B_0},\qquad l=1,\dots,L,$$

где $B_l\in\mathbb{C}[z]$ – некоторые коэффициенты многочленов b_{l1}, $l=0,1,\dots,L$, и значит,

$$\deg B_l\leqslant\deg_z b_{l1}\leqslant C_5 n,\qquad l=0,1,\dots,L,$$

что завершает доказательство леммы.

Лемма 3.3. *Определитель*

$$\det\Big(P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)\Big)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\overline{\varkappa}\in\Omega} \tag{3.5}$$

отличен от нуля.

Доказательство. Предположим, что определитель (3.5) тождественно равен нулю, и значит, ранг совокупности форм $R^{[0]}(z;\overline{a}), R^{[1]}(z;\overline{a}), R^{[2]}(z;\overline{a}), \dots$ равен $\widetilde{\omega}$, где $\widetilde{\omega}<\omega$. Так как $R^{[0]}(z;\overline{a})\not\equiv 0$, то $\widetilde{\omega}\geqslant 1$. По лемме 6 [6, гл. 3] функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\overline{a})=\sum_{\overline{\varkappa}:|\overline{\varkappa}|=N}\overline{a}^{\overline{\varkappa}}P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)+\sum_{\overline{\varkappa}:|\overline{\varkappa}|=N-1}\overline{a}^{\overline{\varkappa}}P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)\sum_{j=1}^{m}a_jf_j(z),$$
$$n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1,$$

линейно независимы. Поэтому ранг матрицы

$$\Big(P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)\Big)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\overline{\varkappa}\in\Omega}$$

равен $\widetilde{\omega}$, и в ней можно выбрать $\widetilde{\omega}$ линейно независимых столбцов. Будем делать такой выбор “слева направо”, т.е. столбец с номером $\overline{\varkappa}\in\Omega$ выбирается в том и только том случае, когда он линейно не выражается через столбцы с номерами, меньшими $\overline{\varkappa}$. Тогда базисные столбцы будут иметь номера из некоторого множества $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, причем с некоторыми рациональными функциями (2.3) будут справедливы равенства

$$P^{[n]}_{\overline{\varkappa}'}(z)=\sum_{\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}}P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z)=\sum_{\substack{\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}\\ \overline{\varkappa}\prec\overline{\varkappa}'}}P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z),$$
$$n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1,\quad \overline{\varkappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Delta=\Delta(z)=\det\Big(P^{[n]}_{\overline{\varkappa}}(z)\Big)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}}\not\equiv 0,$$

и, согласно оценкам (1.10), находим, что

$$\deg\Delta<\widetilde{\omega}M+\frac{\widetilde{\omega}(\widetilde{\omega}+1)}{2}t<\widetilde{\omega}M+\omega^2t.$$

Для произвольного решения $a_1,\dots,a_m$ системы (3.1) набор функций

$$x_{\overline{\varkappa}}=\begin{cases}\overline{a}^{\overline{\varkappa}}, & \text{если } |\overline{\varkappa}|=N,\\ \overline{a}^{\overline{\varkappa}}(a_1f_1+\dots+a_mf_m), & \text{если } |\overline{\varkappa}|=N-1,\end{cases}$$

доставляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений (3.2) порядка ω. В доказательстве леммы 8 [6, гл. 3 с.102–103] рациональные функции $D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}$, $\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\overline{\varkappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, были представлены в виде

$$D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} = -\frac{\lambda_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}}{\lambda}, \qquad \lambda \not\equiv 0, \quad \overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \overline{\varkappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \tag{3.6}$$

где λ и $\lambda_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}$ – миноры порядка $(\omega - \widetilde{\omega})$ некоторой фундаментальной матрицы решений системы (3.2). По лемме 3.1 элементы этой фундаментальной матрицы решений есть многочлены от функций (3.3) степени не выше N с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Поэтому миноры $\lambda, \lambda_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}$, $\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\overline{\varkappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}$, порядка $(\omega - \widetilde{\omega})$ являются многочленами от функций (3.3) степени не выше $(\omega - \widetilde{\omega})N \leqslant \omega N$ с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Как следует из леммы 3.2, для рациональных функций (3.6) существует представление

$$\begin{gathered} D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z) = \frac{B_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z)}{B(z)}, \qquad B, B_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} \in \mathbb{C}[z], \quad B \not\equiv 0, \\ \deg B \leqslant C_5 \omega N, \quad \deg B_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'} \leqslant C_5 \omega N, \quad \overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}, \quad \overline{\varkappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

где постоянная C_5 зависит только от совокупности функций (3.3), которые, в свою очередь, однозначно определяются системой (0.1) (точка β не зависит ни от чего). Но из леммы 3 [6, гл. 3] следует, что система (0.1) полностью задается набором линейно независимых над $\mathbb{C}(z)$ функций $1, f_1(z), \ldots, f_m(z)$. Поэтому $C_5 = C_5(f_1, \ldots, f_m)$.

Для произвольного многочлена $v \in \mathbb{C}(z)[y_1, \ldots, y_m]$ через $v(\overline{f})$ обозначим результат подстановки в него функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$ соответственно. Тогда подобно (1.4)

$$R_{\overline{s}}^{[n]}(z) = \sum_{\overline{\varkappa} \in \Omega} P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z) x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f}), \qquad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \overline{s} \in \Theta,$$

и

$$\begin{aligned} R_{\overline{s}}^{[n]}(z) &= \sum_{\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z) x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f}) + \sum_{\overline{\varkappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}} P_{\overline{\varkappa}'}^{[n]}(z) x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}}(\overline{f}) \\ &= \sum_{\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z) \Big(x_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f}) + \sum_{\overline{\varkappa}' \in \Omega \setminus \widetilde{\Omega}} D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}'}(z) x_{\overline{\varkappa}',\overline{s}}(\overline{f}) \Big) \\ &= \sum_{\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}} P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z) \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f}), \qquad n = 0, 1, \ldots, \widetilde{\omega} - 1, \quad \overline{s} \in \Theta, \end{aligned} \tag{3.8}$$

где многочлены $x_{\overline{\varkappa},\overline{s}} \in \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_m]$, $\overline{\varkappa} \in \Omega$, $\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}} \in \mathbb{C}(z)[y_1, \ldots, y_m]$, $\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}$, $\overline{s} \in \Theta$, определяются согласно формулам (2.2) и (2.5).

Выберем по заданному множеству $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ в соответствии с предложением 2.1 множества $\Omega_1 \subset \widetilde{\Omega}$ и $\Theta_1 \subset \widetilde{\Theta}$, $\operatorname{Card} \Omega_1 = \operatorname{Card} \Theta_1 = \widetilde{\theta}$. Тогда определитель $\chi = \chi(z)$ матрицы

$$\big(B(z) \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f}) \mid \delta_{\overline{\varkappa},\overline{r}} \big)_{\overline{\varkappa} \in \widetilde{\Omega}; \overline{s} \in \Theta_1, \overline{r} \in \widetilde{\Omega} \setminus \Omega_1}, \tag{3.9}$$

с точностью до знака равный

$$B^{\widetilde{\theta}}\cdot\det\bigl(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f})\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1},$$

является невырожденным многочленом от функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$ и не равен тождественно нулю ввиду их алгебраической независимости. С другой стороны,

$$B(z)\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f}),\qquad \overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega},\quad \overline{s}\in\Theta_1,$$

есть некоторые линейные формы от функций 1, $f_1(z),\dots,f_m(z)$ с коэффициентами из $\mathbb{C}[z]$ и оценкой $C_5\omega N$ на степени этих коэффициентов согласно (3.7). Поэтому χ как многочлен от $z,f_1,\dots,f_m$ имеет степень не выше $\widetilde{\theta}\cdot C_5\omega N$ по z и не выше $\widetilde{\theta}$ по группе $f_1,\dots,f_m$. По теореме 1 [13] порядок нуля этого определителя в точке $z=0$ не превосходит

$$C_6(C_5\widetilde{\theta}\omega N+1)\widetilde{\theta}^m<2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

где $C_6=C_6(f_1,\dots,f_m)$.

Если умножить матрицу

$$\Bigl(P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)\Bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}},$$

определитель которой равен Δ, справа на матрицу (3.9), то, согласно соотношениям (3.8), получим матрицу

$$\bigl(B(z)R_{\overline{s}}^{[n]}(z)\ \big|\ P_{\overline{r}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\overline{s}\in\Theta_1,\overline{r}\in\widetilde{\Omega}\setminus\Omega_1}.$$

Ее определитель равен $\Delta\,\chi\not\equiv0$. В первых $\widetilde{\theta}$ столбцах этой матрицы стоят линейные функциональные формы, порядок нуля которых в точке $z=0$ в соответствии с оценками (1.10) не ниже $K-\widetilde{\omega}$. Поэтому

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi\geqslant\widetilde{\theta}(K-\widetilde{\omega})>\widetilde{\theta}K-\theta\omega.$$

С другой стороны,

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta\chi=\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta+\operatorname*{ord}_{z=0}\chi\leqslant\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta+2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

откуда

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta>\widetilde{\theta}K-\theta\omega-2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N,$$

и, значит,

$$0\leqslant\deg\Delta-\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta<\widetilde{\omega}M-\widetilde{\theta}K+\omega^2t+\theta\omega+2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N. \tag{3.10}$$

Выбираем $M_*=M_*(f_1,\dots,f_m)$ так, чтобы для всех $M>M_*$ выполнялось

$$\omega^2t+\theta\omega+2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N<\frac{\varepsilon}{\theta}M, \tag{3.11}$$

и тогда

$$K < \Big(\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{\theta\widetilde{\theta}}\Big)M \leqslant \Big(\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} + \frac{\varepsilon}{\theta}\Big)M.$$

Осталось воспользоваться оценкой предложения 2.1:

$$\frac{\widetilde{\omega}}{\widetilde{\theta}} \leqslant \frac{\omega}{\theta} - \frac{1}{(N+m-1)\theta} = \frac{\omega - 3\varepsilon}{\theta},$$

откуда

$$K < \frac{\omega - 2\varepsilon}{\theta} M,$$

что противоречит выбору K в условии леммы 1.1. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 3.4. *Справедливо равенство*

$$\Delta(z) = \det\Big(P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(z)\Big)_{n=0,1,\dots,\omega-1;\overline{\varkappa}\in\Omega} = z^{\operatorname{ord}_{z=0}\Delta}\Delta_0(z),$$

где $\Delta_0(z)$ *– многочлен,* $\Delta_0 \not\equiv 0$ *и* $\deg\Delta_0 < 2\varepsilon M$.

Доказательство. Согласно оценке (3.10) с $\widetilde{\omega} = \omega$ и $\widetilde{\theta} = \theta$ имеем:

$$\deg\Delta - \operatorname*{ord}_{z=0}\Delta < \omega M - \theta K + \omega^2 t + \theta\omega + 2C_5C_6\theta^{m+1}\omega N < 2\varepsilon M,$$

что и требовалось.

Теперь, после проведенной подготовительной работы, мы можем перейти к числовым линейным формам.

Лемма 3.5. *Ранг числовой матрицы*

$$\Big(P_{\overline{\varkappa}}^{[n]}(\alpha)\Big)_{n=0,1,\dots,\omega+[2\varepsilon M];\overline{\varkappa}\in\Omega}$$

равен в точности ω.

Доказательство этого факта использует ставшие уже стандартными рассуждения Зигеля, аналогичные приведенным в доказательстве леммы 10 [6, гл. 3], и опирается на результат леммы 3.4.

Лемма 3.6. *Ранг числовой матрицы*

$$\Big(P_{\overline{s}^*}^{[n]}(\alpha) \quad P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n]}(\alpha)\Big)_{n=0,1,\dots,\omega+[2\varepsilon M]}$$

равен двум.

Доказательство основной теоремы. Для произвольного $M > M_*$, где M_* определяется согласно неравенству (3.11), воспользуемся результатом леммы 3.6 и выберем целые числа n_1, n_2, $0 \leqslant n_1 < n_2 \leqslant \omega + 2\varepsilon M < 3\varepsilon M$, такие, что числовая матрица

$$\begin{pmatrix} P_{\overline{s}^*}^{[n_1]}(\alpha) & P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n_1]}(\alpha) \\ P_{\overline{s}^*}^{[n_2]}(\alpha) & P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n_2]}(\alpha) \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

невырождена. Пусть $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Положим для $j = 1, 2$

$$\begin{aligned} q_j &= b^{M+tn_j}(M+tn_j)!P_{\overline{s}^*-\overline{e}_{l^*}}^{[n_j]}(\alpha) \in \mathbb{Z}, \\ p_j &= -b^{M+tn_j}(M+tn_j)!P_{\overline{s}^*}^{[n_j]}(\alpha) \in \mathbb{Z}, \\ r_j &= b^{M+tn_j}(M+tn_j)!R_{\overline{s}^*}^{[n_j]}(\alpha) = q_j f_{l^*}(\alpha) - p_j. \end{aligned}$$

Поскольку $n_j < 3\varepsilon M$, можно воспользоваться оценками леммы 1.3 для целых чисел q_j и линейных форм r_j, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} |q_j| &< b^{M+tn_j}(M+tn_j)! \sum_{\nu=0}^{M+tn_j} \frac{C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M}}{\nu!}\alpha^\nu \\ &\leqslant C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{M+C_7\varepsilon M} \leqslant M^M C_8^{M(\ln M)^{m/(m+1)}}, \\ |r_j| &< b^{M+tn_j}(M+tn_j)! C_0^{\omega M/\varepsilon} M^{C_2\varepsilon M} C_3^M M^{-K} \\ &\leqslant M^{-M+C_9\varepsilon M+M(m-1)/(N+m-1)} C_0^{\omega M/\varepsilon} \leqslant M^{-M} C_{10}^{M(\ln M)^{m/(m+1)}}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Выберем $q_* = \frac{1}{2} M_*^{M_*} C_{10}^{-M_*(\ln M_*)^{m/(m+1)}}$, и пусть p, q – произвольные целые числа, $|q| \geqslant q_*$. Возьмем наименьшее целое M такое, что

$$M^{-M} C_{10}^{M(\ln M)^{m/(m+1)}} \leqslant \tfrac{1}{2}|q|^{-1}, \tag{3.14}$$

при этом $M > M_*$. Тогда

$$\begin{aligned} M^M C_8^{M(\ln M)^{m/(m+1)}} &\leqslant (M-1)^{M-1}(2C_8)^{M(\ln M)^{m/(m+1)}} \\ &\leqslant 2|q|(2C_8)^{M(\ln M)^{m/(m+1)}} \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}|q|(4C_8)^{M(\ln M)^{m/(m+1)}}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Из выбора (3.14) вытекает, что

$$C_{11} \ln M < \ln\ln|q| < C_{12} \ln M,$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} (4C_8)^{M(\ln M)^{m/(m+1)}} &\leqslant (M^M)^{C_{13}(\ln M)^{-1/(m+1)}} \\ &\leqslant |q|^{\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(m+1)}}, \qquad \gamma > 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Оценки (3.13) согласно неравенствам (3.15), (3.16) и (3.14) соответственно перепишутся в виде:

$$|q_j| < \tfrac{1}{2}|q|^{1+\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(m+1)}}, \qquad |r_j| < \tfrac{1}{2}|q|^{-1}, \quad j = 1, 2.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} q_1 & p_1 \\ q_2 & p_2 \end{pmatrix}$$

невырождена в силу невырожденности (3.12). Поэтому, по крайней мере, одна из линейно независимых над $\mathbb{C}$ линейных форм r_1, r_2 должна быть линейно независимой с $r = qf_{l^*}(\alpha) - p$. Пусть для определенности это будет форма r_1, т.е.

$$\lambda = \det\begin{pmatrix} q & p \\ q_1 & p_1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} q & -r \\ q_1 & -r_1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поскольку все входящие в левый определитель числа являются целыми, то и $\lambda \in \mathbb{Z}$, иными словами, $|\lambda| \geqslant 1$. Таким образом,

$$1 \leqslant |\lambda| = |rq_1 - qr_1| \leqslant |r| \cdot |q_1| + |q| \cdot |r_1| < \tfrac{1}{2}|r| \cdot |q|^{1+\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(m+1)}} + \tfrac{1}{2},$$

откуда

$$|r| > |q|^{-1-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/(m+1)}},$$

что завершает доказательство основной теоремы.

§ 4. Уточнение основной теоремы в случае $m = 2$

Изложенная выше конструкция существенно использует условие алгебраической независимости над $\mathbb{C}(z)$ рассматриваемых $\mathbb{Q}$E-функций. Однако в случае $m = 2$ удается уточнить предложение 2.1 и тем самым ослабить это условие.

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbb{Q}$E-функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ составляют решение системы*

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz}y_l = Q_{l0} + Q_{l1}y_1 + Q_{l2}y_2, \quad l = 1, 2, \\ Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \qquad l = 1, 2, \quad j = 0, 1, 2, \end{gathered} \tag{4.1}$$

и линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ с единицей; $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ – неособая точка системы (4.1). Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(f_1, f_2; \alpha) > 0$ такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(f_1, f_2; \alpha)$, справедливы неравенства

$$\left| f_l(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/3}}, \qquad l = 1, 2,$$

каково бы ни было целое p.

В случае $m = 2$ справедлив аналог следствия 1 из основной теоремы, в котором полностью отсутствует условие независимости функции $f(z)$ и ее производной.

Следствие 1. *Пусть $\mathbb{Q}$E-функция $f(z)$ является решением дифференциального уравнения*

$$A_2(z)y'' + A_1(z)y' + A_0(z)y = B(z), \qquad A_2, A_1, A_0, B \in \mathbb{C}[z],$$

и $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha A_2(\alpha) \neq 0$. Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(f;\alpha) > 0$ такая, что для любых целых p, q, $|q| \geqslant q_*(f;\alpha)$, либо $f(\alpha) = p/q$, либо

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/3}}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Если функции $1, f(z), f'(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то справедливость неравенства (4.2) вытекает из теоремы 4.1. В противном случае, функция $f(z)$ либо линейно зависима с единицей и, как целая функция, является многочленом, либо удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$E_1(z)y' + E_0(z)y = F(z), \qquad E_1, E_0, F \in \mathbb{C}[z],$$

в котором многочлены E_1, E_0, F взаимно просты, а кроме того, $E_1, E_0, F \in \mathbb{Q}[z]$ согласно лемме 3 [6, гл. 3]. В первом случае, $f(\alpha)$ является рациональным числом, поскольку $f(z) \in \mathbb{Q}[z]$. Во втором случае, если $E_1(\alpha) \neq 0$, то справедливость неравенства (4.2) следует из результата (0.4) А. Б. Шидловского при $m = 1$. Если же $E_1(\alpha) = 0$, то $E_0(\alpha)f(\alpha) = F(\alpha)$, откуда $f(\alpha) = F(\alpha)/E_0(\alpha) \in \mathbb{Q}$, так как равенство $E_0(\alpha) = 0$ невозможно ввиду взаимной простоты многочленов E_1, E_0, F. Тем самым мы доказали (4.2) в случае, когда $f(\alpha)$ не является рациональным числом. Если $f(\alpha) = a/b \in \mathbb{Q}$, то для всех $p, q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant |b|$, либо $f(\alpha) = p/q$, либо

$$\left| f(\alpha) - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{|bq|} \geqslant \frac{1}{|bq|} \geqslant \frac{1}{q^2},$$

откуда следует неравенство (4.2). Утверждение доказано полностью.

Следствие 2. *Пусть*

$$K_{\lambda,\mu}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{(\lambda+1)_\nu(\mu+1)_\nu}\left(\frac{z}{2}\right)^{2\nu}, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \setminus \{-1, -2, \dots\},$$

и $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Тогда существует постоянная $\gamma = \gamma(\lambda, \mu; \alpha) > 0$ такая, что для всех $q \in \mathbb{Z}$, $|q| \geqslant q_*(\lambda, \mu; \alpha)$, справедливо неравенство

$$\left| K_{\lambda,\mu}(\alpha) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/3}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство. Докажем, что при любых значениях параметров $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}$ функции 1, $K_{\lambda,\mu}(z)$, $K'_{\lambda,\mu}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Предположим, что это не так, и для некоторой пары λ, μ эти функции связаны уравнением

$$P_0(z) + P_1(z)K_{\lambda,\mu}(z) + P_2(z)K'_{\lambda,\mu}(z) = 0, \qquad P_0, P_1, P_2 \in \mathbb{C}[z], \tag{4.3}$$

где $P_0(z) + P_1(z)y_1 + P_2(z)y_2 \in \mathbb{C}[z, y_1, y_2]$ – неприводимый многочлен. Заменяя в уравнении (4.3) z на $-z$, и пользуясь тем, что $K_{\lambda,\mu}(z)$ и $K'_{\lambda,\mu}(z)$ являются соответственно четной и нечетной функциями, получим

$$P_0(-z) + P_1(-z)K_{\lambda,\mu}(z) - P_2(-z)K'_{\lambda,\mu}(z) = 0.$$

Поскольку функция $K_{\lambda,\mu}(z)$ линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей, многочлен $P_0(-z) + P_1(-z)y_1 - P_2(-z)y_2$ делится на многочлен $P_0(z) + P_1(z)y_1 + P_2(z)y_2$ в кольце $\mathbb{C}[z, y_1, y_2]$. Это возможно лишь в одном из двух случаев:

$$P_0(-z) \equiv P_0(z), \quad P_1(-z) \equiv P_1(z), \quad P_2(-z) \equiv -P_2(z),$$

или

$$P_0(-z) \equiv -P_0(z), \quad P_1(-z) \equiv -P_1(z), \quad P_2(-z) \equiv P_2(z).$$

Следовательно, функции 1, $K_{\lambda,\mu}(z)$, $K'_{\lambda,\mu}(z)/z$ связаны линейным уравнением с коэффициентами из $\mathbb{C}[z^2]$. В первом случае это уравнение

$$P_0(z) + P_1(z)K_{\lambda,\mu}(z) + \big(zP_2(z)\big)\frac{K'_{\lambda,\mu}(z)}{z} = 0,$$

во втором –

$$\frac{P_0(z)}{z} + \frac{P_1(z)}{z}K_{\lambda,\mu}(z) + P_2(z)\frac{K'_{\lambda,\mu}(z)}{z} = 0.$$

Поэтому функции 1, $\psi(z)$, $\psi'(z)$, где

$$K_{\lambda,\mu}(z) = \psi(z^2), \quad K'_{\lambda,\mu}(z) = 2z\psi'(z^2),$$

линейно зависимы над $\mathbb{C}(z)$. С другой стороны,

$$\psi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b(x)}, \quad b(x) = -4(x+\lambda)(x+\mu),$$

и по теореме 2 работы А. И. Галочкина [14] функции 1, $\psi(z)$, $\psi'(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Полученное противоречие доказывает линейную независимость над $\mathbb{C}(z)$ функций 1, $K_{\lambda,\mu}(z)$, $K'_{\lambda,\mu}(z)$ при любых значениях параметров $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}$. Функция $K_{\lambda,\mu}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{2\lambda + 2\mu + 1}{z}y' + \left(1 + \frac{4\lambda\mu}{z^2}\right)y = \frac{4\lambda\mu}{z^2}.$$

Осталось воспользоваться утверждением теоремы 4.1.

Следствие 3. *Пусть*

$$A_{\lambda,\mu,\beta}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(\beta+1)_\nu}{(\lambda+1)_\nu(\mu+1)_\nu}z^\nu,$$
$$\lambda,\mu,\beta\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\},\quad \beta-\lambda,\beta-\mu\notin\mathbb{N},$$

и $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$. *Тогда существует постоянная* $\gamma=\gamma(\lambda,\mu,\beta;\alpha)>0$ *такая, что для всех* $q\in\mathbb{Z}$, $|q|\geqslant q_*(\lambda,\mu,\beta;\alpha)$, *справедливо неравенство*

$$\left|A_{\lambda,\mu,\beta}(\alpha)-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-2-\gamma(\ln\ln|q|)^{-1/3}},$$

каково бы ни было целое p.

Доказательство. Функция $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ является решением дифференциального уравнения
$$y''+\left(\frac{\lambda+\mu+1}{z}-1\right)y'+\frac{\lambda\mu-(\beta+1)z}{z^2}y=\frac{\lambda\mu}{z^2}$$
и представима в виде

$$A_{\lambda,\mu,\beta}(z)=1+\sum_{\nu=1}^{\infty}z^\nu\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)},\qquad a(x)=x+\beta,\quad b(x)=(x+\lambda)(x+\mu).$$

Согласно теореме 2 [14] при любых значениях параметров $\lambda,\mu,\beta\in\mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}$ таких, что $\beta-\lambda,\beta-\mu\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$, функции 1, $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$, $A'_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ и поэтому можно воспользоваться теоремой 4.1. Если $\beta-\lambda=0$, то функция $A_{\lambda,\mu,\beta}(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$y'+\left(\frac{\mu}{z}-1\right)y=\frac{\mu}{z},$$

и для нее можно воспользоваться результатом (0.4) при $m=1$. Аналогично рассматривается случай $\beta-\mu=0$. Утверждение доказано полностью.

Замечание. Если $\beta-\lambda\in\mathbb{N}$, то для некоторых $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ число $A_{\lambda,\mu,\beta}(\alpha)$ может быть рациональным. Так, например,

$$A_{\lambda,\mu,\lambda+1}(\mu-\lambda-1)=\frac{\mu}{\lambda+1}.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 4.1. Следующее утверждение позволяет уточнить результат предложения 2.1 в случае $m=2$.

Лемма 4.2. *Пусть множество* $\Omega_1\subset\widetilde{\Omega}$ *и отображение* $\sigma\colon\Omega_1\to\Theta$ *удовлетворяют свойствам 1)–3), описанным перед леммой 2.4. Тогда минор* $\det(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}$, $\Theta_1=\sigma(\Omega_1)$, *матрицы* (2.4) *равен*

$$\pm\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1:\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2}\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}+\overline{e}_2}\cdot\prod_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1:\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1}\det\begin{pmatrix}\widetilde{x}_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1} & \widetilde{x}_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}}\\ \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1} & 1\end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Доказательство. Переставим в матрице $(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}$ столбцы таким образом, чтобы на главной диагонали получившейся матрицы X стояли элементы $\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}$, $\overline{\varkappa}\in\Omega_1$, и покажем, что матрица X имеет "почти треугольный" вид.

Прежде всего отметим, что

$$\overline{s}\prec\overline{\varkappa},\ \overline{s}\in\Theta,\ \overline{\varkappa}\in\widetilde{\Omega}\implies \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}=0 \tag{4.5}$$

согласно определению (2.5), так как в этом случае $\overline{s}\prec\overline{\varkappa}$, $\overline{s}-\overline{e}_2\prec\overline{\varkappa}$ и $\overline{s}-\overline{e}_1\prec\overline{\varkappa}$. Пусть $\overline{\varkappa}$ – произвольный мультииндекс из Ω_1. Рассмотрим отдельно две возможности.

а) $|\overline{\varkappa}|=N-1$. Докажем, что в этом случае в строке с номером $\overline{\varkappa}$ матрицы X левее главной диагонали расположены нулевые элементы. Для этого в силу (4.5) достаточно показать, что из условий $\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa}$, $\overline{\varkappa}'\in\Omega_1$ следует $\sigma(\overline{\varkappa}')\prec\overline{\varkappa}$.

Если $|\overline{\varkappa}'|=N$, то $\sigma(\overline{\varkappa}')=\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa}$.

Если $|\overline{\varkappa}'|=N-1$, то $\overline{\varkappa}'\preccurlyeq\overline{\varkappa}-\overline{e}_1+\overline{e}_2$, откуда $\sigma(\overline{\varkappa}')\preccurlyeq\overline{\varkappa}'+\overline{e}_1\preccurlyeq\overline{\varkappa}+\overline{e}_2$. Равенство $\sigma(\overline{\varkappa}')=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2$ возможно лишь в случае $\overline{\varkappa}'=\overline{\varkappa}-\overline{e}_1+\overline{e}_2$, и тогда $\sigma(\overline{\varkappa})\neq\sigma(\overline{\varkappa}')=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2$, т.е. $\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_1$. Из условия 3) и того, что $\overline{\varkappa}+\overline{e}_2\prec\overline{\varkappa}+\overline{e}_1=\sigma(\overline{\varkappa})$ вытекает, что $\overline{\varkappa}'=\sigma^{-1}(\overline{\varkappa}+\overline{e}_2)\succ\overline{\varkappa}$, что противоречит предпосылке $\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa}$. Следовательно, $\sigma(\overline{\varkappa}')\neq\overline{\varkappa}+\overline{e}_2$ и $\sigma(\overline{\varkappa}')\prec\overline{\varkappa}+\overline{e}_2$. Отсюда $\sigma(\overline{\varkappa}')\preccurlyeq\overline{\varkappa}$, и в то же время $\sigma(\overline{\varkappa}')\neq\overline{\varkappa}$, поскольку $|\sigma(\overline{\varkappa}')|=N$, $|\overline{\varkappa}|=N-1$.

Окончательно, $\sigma(\overline{\varkappa}')\prec\overline{\varkappa}$. Воспользовавшись утверждением (4.5), получаем:

$$\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa},\ \overline{\varkappa}'\in\Omega_1\implies \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa}')}=0. \tag{4.6}$$

б) $|\overline{\varkappa}|=N$. Покажем, что если $\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa}-\overline{e}_2$, $\overline{\varkappa}'\in\Omega_1$, то $\sigma(\overline{\varkappa}')\prec\overline{\varkappa}$. Поскольку мультииндексы $\overline{\varkappa}-\overline{e}_2$, $\overline{\varkappa}$ соседние во множестве Ω, это будет означать, что в строке с номером $\overline{\varkappa}$ матрицы X левее главной диагонали стоят нулевые элементы, кроме, быть может, элемента $\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa}-\overline{e}_2)}$, предшествующего $\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}$, в случае $\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1$.

Если $|\overline{\varkappa}'|=N$, то $\sigma(\overline{\varkappa}')=\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\prec\overline{\varkappa}$.

Если $|\overline{\varkappa}'|=N-1$, то $\overline{\varkappa}'\preccurlyeq\overline{\varkappa}-\overline{e}_1$ и $\sigma(\overline{\varkappa}')\preccurlyeq\overline{\varkappa}'+\overline{e}_1\preccurlyeq\overline{\varkappa}$. Равенство $\sigma(\overline{\varkappa}')=\overline{\varkappa}$ невозможно, так как $\sigma^{-1}(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}$. Поэтому $\sigma(\overline{\varkappa}')\prec\overline{\varkappa}$.

Воспользовавшись утверждением (4.5), в случае б) получаем:

$$\overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa},\ \overline{\varkappa}'\in\Omega_1\implies\begin{cases}\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa}')}=0, & \text{если } \overline{\varkappa}'\prec\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\\ \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa}')}=\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa}-\overline{e}_2)}, & \text{если } \overline{\varkappa}'=\overline{\varkappa}-\overline{e}_2.\end{cases} \tag{4.7}$$

Если $\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1$, то $\sigma(\overline{\varkappa}-\overline{e}_2)=\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1$, поскольку $\sigma(\overline{\varkappa}-\overline{e}_2)\neq(\overline{\varkappa}-\overline{e}_2)+\overline{e}_2=\overline{\varkappa}=\sigma(\overline{\varkappa})$. С другой стороны, если $\sigma(\overline{r})=\overline{r}+\overline{e}_1$, $\overline{r}\in\Omega_1$, то, согласно условию 3), выполнено $\overline{r}+\overline{e}_2\in\sigma(\Omega_1)$ и $\sigma^{-1}(\overline{r}+\overline{e}_2)\succ\overline{r}$, т.е. $\sigma^{-1}(\overline{r}+\overline{e}_2)=\overline{r}+\overline{e}_2$ и $\overline{r}+\overline{e}_2\in\Omega_1$.

Согласно утверждениям (4.7) и (4.6) вдоль главной диагонали матрицы X стоят одномерные блоки

$$(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}}),\qquad \overline{\varkappa}\in\Omega_1,\quad \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa},\quad \overline{\varkappa}-\overline{e}_2\notin\Omega_1,$$

или

$$(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}+\overline{e}_2}),\qquad \overline{\varkappa}\in\Omega_1,\quad \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2,$$

или двумерные блоки

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x}_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1} & \widetilde{x}_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}} \\ \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1} & \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}} \end{pmatrix}, \qquad \overline{\varkappa}\in\Omega_1, \quad \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}, \quad \overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1,$$

а в левее и ниже этих блоков расположены нули. В связи с этим, и с учетом того, что $\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\sigma(\overline{\varkappa})}=1$ в случае $\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}$ согласно формуле (2.5), определитель $\det(\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}})_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1}=\pm\det X$ равен (4.4), что и требовалось.

Доказательство теоремы 4.1. Функции $f_1(z)$, $f_2(z)$ не являются многочленами, поскольку каждая из них линейно независима над $\mathbb{C}(z)$ с единицей. Как целые функции, отличные от многочленов, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются трансцендентными функциями. Покажем, что для некоторого $l\in\{1,2\}$ функции 1, $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_l^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Предположим, что это не так. Тогда

$$\begin{gathered} f_l^2(z)=E_{l0}(z)+E_{l1}(z)f_1(z)+E_{l2}(z)f_2(z), \qquad l=1,2; \\ E_{lj}\in\mathbb{C}(z), \qquad l=1,2, \quad j=0,1,2, \end{gathered} \tag{4.8}$$

поскольку функции 1, $f_1(z)$, $f_2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Если $E_{12}\equiv0$, то трансцендентная функция $f_1(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$y^2-E_{11}y-E_{10}=0,$$

что невозможно. Поэтому

$$f_2(z)=\frac{f_1^2(z)-E_{11}(z)f_1(z)-E_{10}(z)}{E_{12}(z)}, \qquad E_{12}\not\equiv0,$$

и после подстановки этого выражения в уравнение (4.8) при $l=2$ заключаем, что трансцендентная функция $f_1(z)$ удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$(y^2-E_{11}y-E_{10})^2-E_{22}E_{12}(y^2-E_{11}y-E_{10})-E_{21}E_{12}^2y-E_{20}E_{12}^2=0,$$

что опять же невозможно. Полученное противоречие показывает, что по крайней мере одна из функций $f_l^2(z)$, $l\in\{1,2\}$, не выражается линейно с коэффициентами из $\mathbb{C}(z)$ через функции 1, $f_1(z)$, $f_2(z)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $l=2$, т.е. что функции 1, $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_2^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Пусть множества Ω_1 и Θ_1 выбраны по заданному $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$ в соответствии с предложением 2.1 и рациональные функции (2.3) представлены в виде (3.7). Обозначим через $\sigma\colon\Omega_1\to\Theta_1$ такое биективное отображение, что пара (Ω_1,σ) удовлетворяет условиям 1)–3). Согласно формуле (2.5) имеем:

$$\begin{aligned} \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}+\overline{e}_2}&=y_2+D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}+\overline{e}_2}, && \text{если } \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2; \\ \widetilde{x}_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1}&=y_1+D_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-2\overline{e}_2+\overline{e}_1}y_2 \\ &\qquad+D_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1}, && \text{если } \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa},\ \overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1; \\ \widetilde{x}_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}}&=y_2, && \text{если } \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa},\ \overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1; \\ \widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1}&=D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-2\overline{e}_2+\overline{e}_1}y_2+D_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1}, && \text{если } \sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa},\ \overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1, \end{aligned}$$

откуда, если воспользоваться леммой 4.2,

$$\begin{aligned}
\chi &= \pm \det\bigl(B(z)\widetilde{x}_{\overline{\varkappa},\overline{s}}(\overline{f})\bigr)_{\overline{\varkappa}\in\Omega_1;\overline{s}\in\Theta_1} \\
&= \pm \prod_{\overline{\varkappa}:\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\notin\Omega_1} B(z)\cdot \prod_{\overline{\varkappa}:\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2} \bigl\{B(z)f_2(z)+B_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}+\overline{e}_2}(z)\bigr\} \\
&\quad\times \prod_{\overline{\varkappa}:\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1} B(z)\Bigl\{-B_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-2\overline{e}_2+\overline{e}_1}(z)f_2^2(z)+B(z)f_1(z) \\
&\quad+\bigl(B_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-2\overline{e}_2+\overline{e}_1}(z)-B_{\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1}(z)\bigr)f_2(z)+B_{\overline{\varkappa}-\overline{e}_2,\overline{\varkappa}-\overline{e}_2+\overline{e}_1}(z)\Bigr\}.
\end{aligned}$$

Поскольку $B(z)\not\equiv 0$ и функции $1,\ f_1(z),\ f_2(z),\ f_2^2(z)$ линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, последнее произведение отлично от нуля. Выражения в фигурных скобках можно рассматривать как многочлены от $z,\ f_1(z),\ f_2(z)$ степени не выше $C_5\omega N$ по z и не выше 2 по группе $f_1,\ f_2$. Согласно следствию из теоремы 1 [15] порядок нуля каждого такого выражения в точке $z=0$ не выше

$$C_{14}(C_5\omega N+1)2^{3^3}\leqslant C_{15}\omega N,$$

где постоянная C_{14}, а следовательно, и C_{15}, зависит только от функций $f_1(z),\ f_2(z)$. Кроме того,

$$\operatorname*{ord}_{z=0} B(z)\leqslant \deg B(z)\leqslant C_5\omega N\leqslant C_{15}\omega N.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\operatorname*{ord}_{z=0}\chi &\leqslant \sum_{\overline{\varkappa}:\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa},\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\notin\Omega_1} C_{15}\omega N+\sum_{\overline{\varkappa}:\sigma(\overline{\varkappa})=\overline{\varkappa}+\overline{e}_2} C_{15}\omega N \\
&\quad+\sum_{\overline{\varkappa}:\overline{\varkappa}-\overline{e}_2\in\Omega_1}(C_{15}\omega N+C_{15}\omega N) \\
&=\operatorname{Card}\Omega_1\cdot C_{15}\omega N\leqslant C_{15}\omega^2 N.
\end{aligned}$$

Осталось в доказательстве леммы 3.3 выбрать $M_*=M_*(f_1,f_2)$ так, чтобы для всех $M>M_*$ выполнялось неравенство

$$\omega^2 t+\theta\omega+C_{15}\omega^2 N<\frac{\varepsilon}{\theta}M.$$

Все остальные рассуждения остаются без изменений. Это завершает доказательство теоремы.

§ 5. Замечания

Обобщение описанного метода позволяет получить оценку снизу для меры трансцендентности значений $\mathbb{Q}$E-функций в рациональной точке.

Теорема 5.1. *Пусть алгебраически независимые над* $\mathbb{C}(z)$ $\mathbb{Q}$E-*функции* $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m\geqslant 2$, *доставляют решение системы* (0.1); $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ – *неособая точка этой системы и* $d\in\mathbb{N}$. *Тогда существуют положительные* *постоянные* $\gamma = \gamma(f_1,\dots,f_m;\alpha,d)$ *и* $C = C(f_1,\dots,f_m;\alpha,d)$ *такие, что для любого многочлена* $P \in \mathbb{Z}[y]$, $\deg P = d$, *справедливы неравенства*

$$\Big|P\big(f_l(\alpha)\big)\Big| > C\cdot H^{-d-\gamma(\ln\ln H)^{-1/(m+1)}}, \qquad l=1,\dots,m, \quad H=H(P),$$

где $H(P)$ *– высота (максимум модулей коэффициентов) многочлена* $P(y)$.

Доказательство этого утверждения будет изложено в другой статье.

Автор выражает глубокую благодарность Ю. В. Нестеренко за большое внимание, оказанное этой работе.

Список литературы

1. *Siegel C.L.* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.–Math. Kl. 1929–1930. №1. P. 1–70.
2. *Шидловский А.Б.* Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // Матем. заметки. 1967. Т. 2. №1. С. 33–44.
3. *Шидловский А.Б.* Об оценках меры трансцендентности значений E-функций // УМН. 1967. Т. 22. №3 (135). С. 245–246.
4. *Shidlovsky A.B.* On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E-functions // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1979. V. 27. P. 385–407.
5. *Lang S.* Introduction to Transcendental Numbers. Reading: Addison Wesley Publishing Co., 1966.
6. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
7. *Chudnovsky G.V.* On some applications of diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
8. *Салихов В.Х.* Неприводимость гипергеометрических уравнений и алгебраическая независимость значений E-функций // Acta Arithmetica. 1990. Т. LIII. №5. С. 453–471.
9. *Салихов В.Х.* Критерий алгебраической независимости значений одного класса гипергеометрических E-функций // Матем. сб. 1990. Т. 181. №2. С. 189–211.
10. *Олейников В.А.* О дифференциальной неприводимости линейного неоднородного уравнения // ДАН СССР. 1970. Т. 194. №5. С. 1017–1020.
11. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1983.
12. *Нестеренко Ю.В.* Оценки порядков нулей функций одного класса и их приложение в теории трансцендентных чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1977. Т. 41. №2. С. 253–284.
13. *Нестеренко Ю.В.* Оценки числа нулей функций некоторых классов // Acta Arithmetica. 1989. Т. LIII. №1. С. 29–46.
14. *Galochkin A.I.* On effective bounds for certain linear forms // New Advances in Transcendence Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. P. 207–214.
15. *Нгуен Тьен Тай.* Об оценках порядков нулей многочленов от аналитических функций и их приложении к оценкам мер взаимной трансцендентности значений E-функций // Матем. сб. 1983. Т. 120 (162). №1. С. 112–142.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
11.11.1994