Математические заметки

том 76 выпуск 2 август 2004

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОБ ОБРАТНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛЕЖАНДРА ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

В. В. Зудилин

Преобразование Лежандра последовательности чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ определяется правилом

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}c_k, \qquad n=0,1,2,\dots;$$

при этом последовательность целых чисел $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ преобразуется в другую целочисленную последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Обратное преобразование Лежандра [1]

$$c_n=\binom{2n}{n}^{-1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}d_{n,k}a_k, \qquad n=0,1,2,\dots, \tag{1}$$

где

$$d_{n,k}=\binom{2n}{n-k}-\binom{2n}{n-k-1}=\frac{2k+1}{n+k+1}\binom{2n}{n-k}, \qquad n=0,1,2,\dots, \quad k=0,1,\dots,n, \tag{2}$$

вообще говоря, указанным свойством не обладает, но в соответствии с формулами (1) справедливы включения $D_nc_n\in\mathbb{Z}$, $n=1,2,\dots$, если $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}\subset\mathbb{Z}$; здесь через D_n обозначено наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,n$. На основе экспериментальных данных А. Шмидт предположил, что для одного семейства последовательностей $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ обратное преобрахование Лежандра также приводит к целочисленным последовательностям. Именно, он сформулировал в [2, §4] следующую задачу.

Задача Шмидта. Пусть для любого целого $r\geqslant 2$ последовательность чисел $\{c_k^{(r)}\}_{k=0}^{\infty}$, независимых от параметра n, определяется равенством

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^{r}\binom{n+k}{k}^{r}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}c_k^{(r)}, \qquad n=0,1,2,\dots.$$

Показать, что все числа $c_k^{(r)}$ являются целыми.

Отметим, что в случае $r=2$ последовательность $\{c_k^{(2)}\}$ задает обратное преобразование Лежандра знаменитой последовательности чисел Апери [3], реализующей знаменатели подходящих приближений в доказательстве иррациональности числа $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-3}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке научно-исследовательской стипендии фонда Александра фон Гумбольдта и при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00359.

Практически сразу после опубликования задачи она была независимо решена самим Шмидтом [1] в случае $r = 2$ и Ф. Штрелем [4] при $r = 2, 3$; именно, были получены следующие явные выражения, доказывающие целочисленность соответствующих последовательностей:

$$c_k^{(2)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^3 = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \binom{2j}{k}, \quad c_k^{(3)} = \sum_{j=0}^{k} \binom{2j}{j}^2 \binom{k}{j}^2 \binom{2j}{k-j}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots .$$

(Биномиальные коэффициенты $\binom{n}{k}$ считаем равными нулю при $k < 0$ и $k > n$.) Задача Шмидта была позднее сформулирована в [5, упражнение 114 на с. 256] с указанием, что Г. Уилф доказал включения $c_n^{(r)} \in \mathbb{Z}$ для любого r, но только для $n \leqslant 9$.

Настоящая статья посвящена полному решению задачи Шмидта; мы доказываем следующие явные формулы для $c_n^{(r)}$.

Теорема. *Числа $c_n^{(r)}$ в формулировке задачи Шмидта действительно являются целыми. Точнее, для произвольного $s = 1, 2, \dots$ имеют место формулы*

$$\begin{aligned} c_n^{(2s)} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^{2s-1} \binom{n}{j} \sum_{k_1 \geqslant \dots \geqslant k_{s-1} \geqslant j} \!\!\cdots\!\! \sum \binom{j}{n-k_1} \binom{k_1}{j} \binom{k_1+j}{k_1-j} \\ &\quad \times \binom{2j}{k_{s-1}-j} \prod_{i=2}^{s-1} \binom{2j}{k_{i-1}-k_i} \binom{k_i+j}{k_i-j}^2, \\ c_n^{(2s+1)} &= \sum_{j=0}^{n} \binom{2j}{j}^{2s} \binom{n}{j}^2 \sum_{k_1 \geqslant \dots \geqslant k_{s-1} \geqslant j} \!\!\cdots\!\! \sum \binom{2j}{n-k_1} \binom{k_1+j}{k_1-j}^2 \\ &\quad \times \binom{2j}{k_{s-1}-j} \prod_{i=2}^{s-1} \binom{2j}{k_{i-1}-k_i} \binom{k_i+j}{k_i-j}^2, \end{aligned}$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$.

Доказательство. Применяя к последовательности

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^r \binom{n+k}{k}^r = \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}^r \binom{n+k}{n-k}^r, \qquad n = 0, 1, 2, \dots,$$

обратное преобразование Лежандра (1), (2), находим

$$c_n^{(r)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{2n}{n}^{-1} \binom{2j}{j}^r t_{n,j}^{(r)}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} t_{n,j}^{(r)} &= \sum_{k=j}^{n} (-1)^{n-k} d_{n,k} \binom{k+j}{k-j}^r \\ &= \sum_{l \geqslant 0} (-1)^l \frac{2n-2l+1}{2n-l+1} \binom{2n}{l} \binom{n-l+j}{n-l-j}^r, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \quad j = 0, 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

Последняя сумма является *обрывающимся* (т.е. содержащим конечное число членов) *гипергеометрическим рядом*

$$_{r+1}F_r \left(\begin{matrix} a_0, a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_r \end{matrix} \,\middle|\, z \right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(a_0)_l (a_1)_l \cdots (a_r)_l}{l!\,(b_1)_l \cdots (b_r)_l} z^l$$

при надлежащем выборе параметров; здесь и далее $(a)_l$ обозначает символ Похгаммера: $(a)_l = a(a+1)\cdots(a+l-1)$ для $l = 1, 2, \ldots$ и $(a)_0 = 1$. Отношение двух последовательных членов суммы в (4) равно

$$\frac{-(2n+1)+l}{1+l} \cdot \frac{-\frac{1}{2}(2n-1)+l}{-\frac{1}{2}(2n+1)+l} \cdot \left(\frac{-(n-j)+l}{-(n+j)+l}\right)^r;$$

поэтому

$$t_{n,j}^{(r)} = \binom{n+j}{n-j}^r \cdot {}_{r+1}F_r\left(\begin{matrix} -(2n+1), -\frac{1}{2}(2n-1), -(n-j), \ldots, -(n-j) \\ -\frac{1}{2}(2n+1), -(n+j), \ldots, -(n+j) \end{matrix} \,\middle|\, 1\right)$$

является *совершенно уравновешенным* гипергеометрическим рядом. Таким образом, наша стратегия доказательства теоремы заключается в следующем: применить подходящую формулу преобразования к полученному гипергеометрическому представлению величин (4). Требуемая формула – многомерное обобщение классического преобразования Уиппла [6] – установлена Дж. Эндрюсом в [7]. Осуществляя переход $q \to 1$ в [7, теорема 4], заключаем, что *для $s \geqslant 1$ и неотрицательного целого m выполнено*

$$\begin{aligned}
&{}_{2s+3}F_{2s+2}\left(\begin{matrix} a, 1+\frac{1}{2}a, & b_1, & c_1, & \ldots, & b_s, & c_s, & -m \\ \frac{1}{2}a, & 1+a-b_1, & 1+a-c_1, & \ldots, & 1+a-b_s, & 1+a-c_s, & 1+a+m \end{matrix} \,\middle|\, 1\right) \\
&\quad = \frac{(1+a)_m(1+a-b_s-c_s)_m}{(1+a-b_s)_m(1+a-c_s)_m} \sum_{l_1\geqslant 0}\sum_{l_2\geqslant 0}\cdots\sum_{l_{s-1}\geqslant 0} \frac{(-m)_{l_1+\cdots+l_{s-1}}}{(b_s+c_s-a-m)_{l_1+\cdots+l_{s-1}}} \\
&\quad\quad \times \prod_{i=1}^{s-1} \frac{(1+a-b_i-c_i)_{l_i}(b_{i+1})_{l_1+\cdots+l_i}(c_{i+1})_{l_1+\cdots+l_i}}{l_i!\,(1+a-b_i)_{l_1+\cdots+l_i}(1+a-c_i)_{l_1+\cdots+l_i}}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

В случае $r = 2s+1$ в (5) полагаем $a = -(2n+1)$ и $b_1 = c_1 = \cdots = b_s = c_s = -m = -(n-j)$; тогда

$$\begin{aligned}
t_{n,j}^{(2s+1)} &= \binom{n+j}{n-j}^{2s-2} \frac{(2n)!}{(3j-n)!\,(n-j)!^3} \sum_{l_1,\ldots,l_{s-1}\geqslant 0}\!\!\cdots\sum \frac{(-1)^{l_1+\cdots+l_{s-1}}(-(n-j))_{l_1+\cdots+l_{s-1}}}{(3j-n+1)_{l_1+\cdots+l_{s-1}}} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{s-1}\binom{2j}{l_i}\left(\frac{(-(n-j))_{l_1+\cdots+l_i}}{(-(n+j))_{l_1+\cdots+l_i}}\right)^2 \\
&= \frac{(2n)!}{(2j)!\,(n-j)!^2} \sum_{l_1,\ldots,l_{s-1}\geqslant 0}\!\!\cdots\sum \binom{2j}{n-l_1-\cdots-l_{s-1}-j} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{s-1}\binom{2j}{l_i}\binom{n-l_1-\cdots-l_i+j}{n-l_1-\cdots-l_i-j}^2.
\end{aligned}$$

Если $r = 2s$, применяем формулу (5) с выбором $a = -(2n+1)$, $b_1 = (a+1)/2 = -n$ и $c_1 = b_2 = \cdots = b_s = c_s = -m = -(n-j)$:

$$\begin{aligned}
t_{n,j}^{(2s)} &= \binom{n+j}{n-j}^{2s-3} \frac{(2n)!}{(3j-n)!\,(n-j)!^3} \sum_{l_1,\ldots,l_{s-1}\geqslant 0}\!\!\cdots\sum \frac{(-1)^{l_1+\cdots+l_{s-1}}(-(n-j))_{l_1+\cdots+l_{s-1}}}{(3j-n+1)_{l_1+\cdots+l_{s-1}}} \\
&\quad \times \binom{j}{l_1}\frac{(-(n-j))_{l_1}}{(-n)_{l_1}}\,\frac{(-(n-j))_{l_1}}{(-(n+j))_{l_1}} \prod_{i=2}^{s-1}\binom{2j}{l_i}\left(\frac{(-(n-j))_{l_1+\cdots+l_i}}{(-(n+j))_{l_1+\cdots+l_i}}\right)^2 \\
&= \frac{(2n)!\,j!}{n!\,(n-j)!\,(2j)!} \sum_{l_1,\ldots,l_{s-1}\geqslant 0}\!\!\cdots\sum \binom{2j}{n-l_1-\cdots-l_{s-1}-j} \\
&\quad \times \binom{j}{l_1}\binom{n-l_1}{j}\binom{n-l_1+j}{n-l_1-j}\prod_{i=2}^{s-1}\binom{2j}{l_i}\binom{n-l_1-\cdots-l_i+j}{n-l_1-\cdots-l_i-j}^2.
\end{aligned}$$

Подстановка найденных выражений в (3) завершает доказательство теоремы.

Автор благодарит П. Бундшу, К. Краттенталера, Дж. Сондова и А. Шмидта за стимулирующие обсуждения. Автор искренне признателен редколлегии “Электронного журнала по комбинаторике” (`http://www.combinatorics.org`) за электронную публикацию в [8] полученного результата.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schmidt A. L. // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1995. V. 58. № 3. P. 358–375. **2**. Schmidt A. L. // J. Comput. Appl. Math. 1993. V. 49. № 1–3. P. 243–249. **3**. Apéry R. // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13. **4**. Strehl V. // Discrete Math. 1994. V. 136. № 1–3. P. 309–346. **5**. Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O. Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science. 2nd edition. Reading, MA: Addison-Wesley Publ., 1994. **6**. Whipple F. J. W. // Proc. London Math. Soc. (2). 1926. V. 24. P. 247–263. **7**. Andrews G. E. // Theory and Application of Special Functions (Proc. Advanced Sem., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1975) / ed. R. A. Askey. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Publ. No. 35. New York: Academic Press, 1975. P. 191–224. **8**. Zudilin W. // Electron. J. Combin. 2004. V. 11. № 1. #R22, 8 pp.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило
27.04.2004