УДК 511.3

Д. Бертран, В. В. Зудилин

Производные зигелевых модулярных форм и показательные функции

Доказывается, что дифференциальное поле, порожденное зигелевыми модулярными формами, и дифференциальное поле, порожденное экспонентами многочленов, линейно разделены над $\mathbb{C}$. Вместе с теоремой из нашей предыдущей работы [3] этот результат дает полное многомерное обобщение теоремы Малера о степени трансцендентности поля, порожденного показательной функцией и производными модулярной функции. Приводятся два доказательства нашего результата: чисто алгебраическое и аналитическое, но в основе обоих лежат аргументы дифференциальной алгебры, а также устойчивость дифференциального поля, порожденного рациональными и модулярными функциями, под действием симплектической группы.

Библиография: 10 наименований.

§ 1. Введение и формулировка результатов

В 1969 г. К. Малер [1] доказал, что для любой модулярной функции $f\colon\{\tau\in\mathbb{C}\colon \operatorname{Im}\tau>0\}\to\mathbb{C}$, отличной от постоянной, и любого ненулевого комплексного числа c пять функций

$$\tau,\ q(\tau)=e^{c\tau},\ f(\tau),\ f'(\tau)\ \text{и}\ f''(\tau)$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}$; здесь штрих обозначает дифференцирование по τ. Поскольку $f'''(\tau)$ рациональна над $\mathbb{C}(f(\tau),f'(\tau),f''(\tau))$, каждое из полей

$$\mathbb{C}(f(\tau),f'(\tau),f''(\tau)),\quad \mathbb{C}(\tau,f(\tau),f'(\tau),f''(\tau)),$$
$$\mathbb{C}(q(\tau),f(\tau),f'(\tau),f''(\tau)),\quad \mathbb{C}(\tau,q(\tau),f(\tau),f'(\tau),f''(\tau))$$

является дифференциально замкнутым, и соответствующие степени трансцендентности над $\mathbb{C}$ равны $3,4,4,5$. Результат Малера был распространен, с одной стороны, на случай общих автоморфных функций одной переменной К. Нишиокой в статье [2] и, с другой стороны, на случай зигелевых модулярных функций произвольной степени в нашей совместной статье [3], однако соответствующий набор функций в [3] не содержит экспоненты. Цель настоящей работы – завершить обобщение работы [3] путем добавления показательных функций.

Для формулировки результатов мы воспользуемся обозначениями из [3]. Пусть g – положительное целое (обозначающее *степень* или *род*) и k – алгебраически замкнутое подполе $\mathbb{C}$.

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

Положим:

$\mathfrak{H}_g$ – верхнее полупространство Зигеля степени g; $\mathbb{Q}$-векторная группа Z_g, порожденная симметрическими матрицами порядка g, имеет размерность

$$n := \frac{g(g+1)}{2},$$

при этом $\mathfrak{H}_g$ открыто в $Z_g(\mathbb{C})$;

$\boldsymbol{\tau} = (\tau_{jl})_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g}$ – общая точка в $\mathfrak{H}_g$, так что $k(2\pi i\boldsymbol{\tau})$ можно рассматривать как поле рациональных функций на Z_g/k;

$\boldsymbol{\delta} = \{\delta_{jl},\ 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g\}$, где

$$\delta_{jl} = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau_{jl}}, \quad 1 \leqslant j < l \leqslant g, \qquad \delta_{jj} = \frac{1}{\pi i}\frac{\partial}{\partial\tau_{jj}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant g;$$

эти n частных производных (дифференцирований) образуют $k(2\pi i\boldsymbol{\tau})$-базис пространства $Der(k(2\pi i\boldsymbol{\tau})/k)$;

Γ – конгруэнц-подгруппа симплектической группы $Sp_{2g}(\mathbb{Z})$ (или, что то же самое, подгруппа конечного индекса в случае $g > 1$);

$K := K(\Gamma, k)$ – поле модулярных функций относительно конгруэнц-подгруппы Γ; как известно, это поле является конечно порожденным расширением k, имеющим степень трансцендентности

$$\operatorname{tr}\deg_k K = \frac{g(g+1)}{2} = n;$$

при $g > 1$ поле $K \otimes_k \mathbb{C}$ отождествляется с полем мероморфных на $\mathfrak{H}_g$ функций, инвариантных под действием группы Γ;

$M := M(\Gamma, k)$ – $\boldsymbol{\delta}$-дифференциальное поле, порожденное K, т.е. поле, порожденное над k всеми частными δ_{jl}-производными любого порядка элементов из K.

В [3, теорема 1] мы доказали, что $\boldsymbol{\delta}$-дифференциальное поле M является конечным расширением поля, порожденного $\boldsymbol{\delta}$-частными производными элементов из K порядка не выше 2, и имеет *конечную степень трансцендентности над* k, равную

$$\operatorname{tr}\deg_k M = \dim Sp_{2g} = 2g^2 + g; \tag{1}$$

более того, *поля* M *и* $\mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$ *линейно разделены над* k, поэтому

$$\operatorname{tr}\deg_k M(\boldsymbol{\tau}) = \dim Sp_{2g} + n = \frac{1}{2}g(5g+3). \tag{2}$$

Мы обобщаем эту теорему следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* M – $\boldsymbol{\delta}$-*дифференциальное поле, отвечающее полю модулярных функций* K, *и пусть* c – *произвольное ненулевое комплексное число. Тогда показательные функции* $e^{c\tau_{jl}}$, $1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g$, *алгебраически независимы над* $M(\boldsymbol{\tau})$, *поэтому*

$$\operatorname{tr}\deg_k M(\boldsymbol{\tau}, e^{c\boldsymbol{\tau}}) = \dim Sp_{2g} + 2n = 3g^2 + 2g.$$

Настоящая работа устроена следующим образом. § 2 содержит некоторые вспомогательные утверждения о действии группы Γ на $\mathfrak{H}_g$ и Z_g. В § 3, 4 мы приводим два независимых доказательства теоремы 1. Более точно, доказательство из § 3 основано на теореме Акса (функциональной версии гипотезы Шенуэла) и имеет чисто алгебраическую природу, в то время как доказательство из § 4 использует более простую версию теоремы Акса (а именно, доказанный Колчиным мультипликативный аналог теоремы Островского) и аналитические рассуждения. На самом деле, в § 4 мы доказываем следующее усиление теоремы 1.

Теорема 2. *В обозначениях теоремы* 1 *пусть* $\{Q_1,\dots,Q_N\}$ – *произвольное множество многочленов от переменных* $\boldsymbol{\tau}=(\tau_{jl})_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g}$ *с комплексными коэффициентами и без свободных членов. Предположим, что многочлены* $Q_1,\dots,Q_N$ *линейно независимы над* $\mathbb{Q}$. *Тогда функции* $e^{Q_1(\boldsymbol{\tau})},\dots,e^{Q_N(\boldsymbol{\tau})}$ *алгебраически независимы над* $M(\boldsymbol{\tau})$.

Наконец, § 5 посвящен изучению модулярных тэта-констант; особое внимание уделяется роду 2, в котором мы приводим явные выражения для разложений Фурье некоторых логарифмических производных тэта-констант (т.е. разложений в терминах показательных функций $e^{c\tau_{jl}}$ при $c=\pi i$).

Замечание 1. Несмотря на то, что наши рассуждения следуют идеям доказательства из статьи [2], представленные здесь как алгебраический, так и аналитический методы добавления показательных функций к дифференциальному полю, порожденному модулярными формами, являются новыми даже в случае рода 1. Второй автор использовал аналогичные аргументы в другой работе [4] для добавления показательной функции к дифференциальному полю, порожденному так называемым (квантовым) спариванием Юкавы.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Как отмечено в [3], достаточно доказать наши теоремы в случае полной модулярной группы

$$\Gamma = Sp_{2g}(\mathbb{Z});$$

кроме того, не ограничивая общности можно считать, что поле констант совпадает с полем комплексных чисел:

$$k=\mathbb{C}.$$

В дальнейшем мы будем считать эти требования выполненными.

Точно так же, как и в [1], [2], следующее утверждение играет ключевую роль в наших доказательствах. Вместе с конечностью степени трансцендентности M над $\mathbb{C}$ (см. формулу (1) из § 1 и далее § 3) или, альтернативно, с алгебраической независимостью τ_{jl} над M (см. формулу (2) из § 1 и далее § 4) нам, в действительности, понадобится всего лишь одно свойство дифференциального поля $M(\boldsymbol{\tau})$[1]. Напомним, что группа Γ представляет дробно-линейное действие (слева) на верхнем полупространстве Зигеля $\mathfrak{H}_g$:

$$(\gamma,\boldsymbol{\tau})\mapsto\gamma\cdot\boldsymbol{\tau}:=(a\boldsymbol{\tau}+b)(c\boldsymbol{\tau}+d)^{-1}\qquad\text{для всех}\quad\left(\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right),\boldsymbol{\tau}\right)\in\Gamma\times\mathfrak{H}_g,$$

[1] См. замечания 2, 3 и 4 в конце § 4, в которых приводится более детальное сравнение методов двух наших доказательств.

так что она действует (справа) на поле $\mathfrak{M}$ мероморфных на $\mathfrak{H}_g$ функций по правилу

$$(\gamma, f) \mapsto \gamma \cdot f \colon \boldsymbol{\tau} \mapsto (\gamma \cdot f)(\boldsymbol{\tau}) := f(\gamma \cdot \boldsymbol{\tau}) \qquad \text{для всех} \quad (\gamma, f) \in \Gamma \times \mathfrak{M}.$$

Подполе M поля $\mathfrak{M}$ *не* является устойчивым под действием Γ, но имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Поле $M(\boldsymbol{\tau})$ устойчиво под действием группы* Γ.

Доказательство. Для каждого $m = 0, 1, \dots, \infty$ так же, как и в [3, § 4], обозначим через $K^{(m)}$ поле, порожденное над $\mathbb{C}$ всеми $\boldsymbol{\delta}$-производными порядка не выше m всех элементов из K. Тогда $K^{(0)} = K \subset K^{(1)} \subset \dots \subset K^{(\infty)} = M$. Индукцией по m покажем устойчивость $K^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$ под действием Γ. Определение поля K делает это утверждение очевидным при $m = 0$ (а также при $m = 1$ согласно [3, § 5, формула (4)]). В случае произвольного m рассмотрим произвольный элемент f поля $K^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$ и произвольный $\gamma \in \Gamma$; напомним, что дифференциал в точке $\boldsymbol{\tau}$ автоморфизма $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ группы $\mathfrak{H}_g$ задается формулой

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{\tau}}\gamma = {}^t\!(c\boldsymbol{\tau} + d)^{-1} \mathrm{d}\boldsymbol{\tau} (c\boldsymbol{\tau} + d)^{-1}.$$

Поскольку

$$\mathrm{d}_{\boldsymbol{\tau}}(\gamma \cdot f) = \mathrm{d}_{\gamma \cdot \boldsymbol{\tau}} f \circ \mathrm{d}_{\boldsymbol{\tau}}\gamma, \qquad (\mathrm{d}_{\boldsymbol{\tau}}\gamma)^{-1} = \mathrm{d}_{\gamma \cdot \boldsymbol{\tau}}(\gamma^{-1})$$

и $g = \gamma \cdot f$ лежит в $K^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$ по индуктивному предположению, мы заключаем, что каждая компонента $\gamma \cdot (\delta_{jl} f)$ дифференциала $\mathrm{d}_{\gamma \cdot \boldsymbol{\tau}} f$ принадлежит полю, порожденному над $K^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$ всеми $\boldsymbol{\delta}$-производными первого порядка всех элементов g из $K^{(m)}(\boldsymbol{\tau})$. Но последнее поле совпадает с $K^{(m+1)}(\boldsymbol{\tau})$, и поэтому $K^{(m+1)}(\boldsymbol{\tau})$ является устойчивым под действием γ. Лемма доказана.

Следующие утверждения этого параграфа являются упражнениями по коммутативной алгебре.

Лемма 2. *Многочлен* $\det \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{C}[\tau_{jl}, \ 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g]$ *неприводим.*

Доказательство (ср. с упражнением 3 из [5, § 30], в котором рассматривается случай произвольной матрицы). Достаточно показать неприводимость многочлена

$$P_g(\tau_1, \dots, \tau_g) = \det \boldsymbol{\tau}^*, \qquad \text{где} \quad \tau^*_{jl} = \begin{cases} \tau_j, & \text{если } j = l, \\ 1, & \text{если } j = l + 1 \text{ или } l = j + 1, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Действительно, при такой специализации общая степень g многочлена $\det \boldsymbol{\tau}$ не убывает. Мы докажем наше утверждение индукцией по g, начиная с многочленов $P_1(\tau_1) = \tau_1$ и $P_2(\tau_1, \tau_2) = \tau_1\tau_2 - 1$, неприводимость которых очевидна. Раскладывая $\det \boldsymbol{\tau}^*$ по последнему столбцу (или строке), получаем

$$P_g(\tau_1, \dots, \tau_g) = \tau_g P_{g-1}(\tau_1, \dots, \tau_{g-1}) - P_{g-2}(\tau_1, \dots, \tau_{g-2}).$$

Предположим теперь, что многочлен P_g приводим. Применяя лемму Гаусса к кольцу $\mathbb{C}[\tau_1, \dots, \tau_{g-1}][\tau_g]$, согласно индукционному предположению заключаем, что многочлены P_{g-1} и P_{g-2} делят друг друга, а это, очевидно, невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство.

Следствие. *Для любого* $m \in \mathbb{Z}$ *многочлен* $\det(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g) \in \mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$ *неприводим. В частности, для любой пары различных целых* m_1, m_2 *многочлены* $\det(\boldsymbol{\tau} - m_1\mathbf{1}_g)$ *и* $\det(\boldsymbol{\tau} - m_2\mathbf{1}_g)$ *взаимно просты в* $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$.

Доказательство. Полагая $\boldsymbol{\tau}' = \boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g$, мы сводим первое утверждение к лемме 2. Второе утверждение следует из невырожденности $\det(\boldsymbol{\tau} - m_2\mathbf{1}_g)$ в точке $\boldsymbol{\tau} = m_1\mathbf{1}_g$.

В следующих утверждениях мы рассматриваем левое действие группы Γ на полном векторном пространстве Z_g симметрических матриц (расширяющее указанное выше действие на $\mathfrak{H}_g$) и соответствующее правое действие Γ на поле $\mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$ рациональных функций на $Z_g/\mathbb{C}$. В частности, нам понадобятся элементы Γ вида

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & -m\mathbf{1}_g \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}), \qquad \gamma_m(\boldsymbol{\tau}) := \gamma_m \cdot \tau = -(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1},$$

где m – произвольное рациональное целое. Для каждого такого m положим

$$\mathscr{D}_m = \{\boldsymbol{\tau} \in Z_g \colon \det(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g) = 0\}.$$

Согласно следствию из леммы 2 множество $\mathscr{D}_m$ является неприводимым дивизором аффинного пространства Z_g, а дивизоры $\mathscr{D}_{m_1}, \mathscr{D}_{m_2}$ различны для $m_1 \neq m_2$.

Лемма 3. *Пусть* $P \in \mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$ – *ненулевой однородный многочлен и* $m \in \mathbb{Z}$. *Положим* $R = \gamma_m \cdot P$, *т.е.* $R(\boldsymbol{\tau}) = P\big(-(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1}\big)$. *Тогда* R *является ненулевой рациональной функцией на* Z_g, *чей полярный дивизор совпадает с* $(\deg P) \cdot \mathscr{D}_m$.

Доказательство. Сдвигая при необходимости параметр m, мы можем считать $m = 0$, так что

$$\gamma_0(\boldsymbol{\tau}) = -\boldsymbol{\tau}^{-1} = \left(\frac{T_{jl}}{\det \boldsymbol{\tau}}\right)_{1 \leqslant j,l \leqslant g},$$

где $(-1)^{j+l+1}T_{jl}$ обозначает определитель (j,l)-минора матрицы $\boldsymbol{\tau}$. В частности, выражения $T_{jl} = T_{lj}$ являются однородными многочленами степени $g-1$ в кольце $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$. Поэтому

$$R(\boldsymbol{\tau}) = P(-\boldsymbol{\tau}^{-1}) = P\left(\frac{T_{jl}}{\det \boldsymbol{\tau}}\right) = \frac{N(\boldsymbol{\tau})}{(\det \boldsymbol{\tau})^{\deg P}},$$

где $N(\boldsymbol{\tau}) = P(T_{jl})$ – либо нулевой, либо однородный многочлен в $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$ степени, равной $(g-1)\deg P$. Поскольку $P \neq 0$ по условию, невырожденность R, а значит, и N очевидна. Следовательно, N является однородным многочленом степени $(g-1)\deg P < \deg(\det \boldsymbol{\tau})^{\deg P}$. Ввиду невырожденности дивизора $\mathscr{D}_0 = \{\boldsymbol{\tau} \in Z_g \colon \det \boldsymbol{\tau} = 0\}$ мы заключаем, что полярный дивизор рациональной функции R в Z_g является целым положительным кратным $\nu\mathscr{D}_0$ дивизора $\mathscr{D}_0$. Иными словами, $R = \tilde{N}/\tilde{D}$, где $\tilde{D} = (\det \boldsymbol{\tau})^\nu$ для некоторого целого $\nu \geqslant 1$ и $\tilde{N}$ взаимно прост с $\tilde{D}$ в кольце $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$; более того, $\nu \leqslant \deg P$ и $\deg \tilde{N} < \deg \tilde{D} = g\nu$. Это завершает доказательство в случае $\deg P = 1$ и сводит общий случай к проверке равенства

$\nu = \deg P$. Заметим, что случай $\deg P = 1$ также влечет тот факт, что прообраз $\gamma_0^{-1}(\mathscr{H})$ аффинной гиперплоскости $\mathscr{H} \subset Z_g$ под действием автоморфизма γ_0 из Z_g является гиперповерхностью степени g в Z_g. Таким образом, образ $\gamma_0(\mathscr{L})$ аффинной прямой $\mathscr{L}$ в Z_g является кривой степени g.

Далее, согласно $\deg \tilde{N} < \deg \tilde{D}$ степень $g\nu$ полярного дивизора $\nu\mathscr{D}_0$ рациональной функции R может быть вычислена следующим образом. Пусть α – точка в $\mathbb{C}$ и $\mathscr{L}$ – прямая в аффинном пространстве Z_g. Тогда уравнение $R(\boldsymbol{\tau}) = \alpha$ задает в Z_g неприводимый и приведенный дивизор D_α степени $g\nu$ (с уравнением $\tilde{N} - \alpha\tilde{D} = 0$), так что D_α пересекает прямую $\mathscr{L}$ в $g\nu$ простых точках. Поскольку γ_0 является как локальным, так и глобальным изоморфизмом Z_g, образы $\gamma_0(D_\alpha)$ и $\gamma_0(\mathscr{L})$ также пересекаются в $g\nu$ простых точках, именно $\gamma_0(D_\alpha) \cap \gamma_0(\mathscr{L}) = \gamma_0(D_\alpha \cap \mathscr{L})$. Но из представления $R = \gamma_0 \cdot P$ следует, что

$$\gamma_0(D_\alpha) = \{\boldsymbol{\tau}' = \gamma_0(\boldsymbol{\tau}) \colon R(\boldsymbol{\tau}) = \alpha\} = \{\boldsymbol{\tau}' \in Z_g \colon P(\boldsymbol{\tau}') = \alpha\}$$

является дивизором степени $\deg P$, в то время как $\gamma_0(\mathscr{L})$ является кривой степени g. Кроме того, они пересекаются (в виду произвольности выбора $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\mathscr{L}$ в Z_g) на конечном расстоянии и (как мы видели) однократно. Поэтому из теоремы Безу мы заключаем, что множество $\gamma_0(D_\alpha) \cap \gamma_0(\mathscr{L})$ состоит из $g \deg P$ различных точек. Следовательно, $g\nu = g \deg P$, откуда $\nu = \deg P$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Пусть t – положительное целое, $P_0, \dots, P_t \in \mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$ – (не обязательно однородные) ненулевые многочлены без постоянных членов и Q – произвольный ненулевой многочлен в $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$. Для каждого $m = 0, \dots, t$ положим $R_m(\boldsymbol{\tau}) = P_m\bigl(-(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1}\bigr)$. Тогда рациональные функции $R_0, \dots, R_t$ и Q линейно независимы над $\mathbb{C}$.*

Доказательство. Прежде всего, заметим, что любое семейство ненулевых рациональных функций на Z_g, полярные дивизоры которых попарно различны, линейно независимо над $\mathbb{C}$. Здесь “попарно различны” означает “различны либо как множества, либо входят с разными кратностями”, при этом тривиальный дивизор 0 (т.е. пустое множество) также может быть элементом этого семейства. Приведенное замечание очевидным образом следует из единственности разложения на множители в $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$. Рассматривая теперь каждую ненулевую однородную компоненту P_{mi} степени i (где $i \in I_m \subset \{1, \dots, \deg P_m\}$) каждого многочлена P_m $(0 \leqslant m \leqslant t)$ из условия, согласно лемме 3 и следствию из леммы 2 мы получаем семейство ненулевых рациональных функций $P_{mi}\bigl(-(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1}\bigr)$, которые вместе с многочленом $Q(\tau)$ допускают попарно различные полярные дивизоры, а именно $i\mathscr{D}_m$ $(m = 0, \dots, t, i \in I_m)$ и 0. Следовательно, это семейство линейно независимо над $\mathbb{C}$, и это же свойство выполнено для исходного набора $R_1, \dots, R_t, Q$.

§ 3. Алгебраическое доказательство теоремы 1

Основным инструментом в этом доказательстве служит следующий результат Дж. Акса [6, теорема 4], являющийся сильной функциональной версией гипотезы Шенуэла.

Предложение 1 (теорема Акса). *Пусть $F \supseteq E \supseteq k \supseteq \mathbb{Q}$ – последовательность полей, Δ – множество дифференцирований поля F таких, что* *для всех* $\delta \in \Delta$ *выполнено* $\delta E \subseteq E$, *и* $\bigcap_{\delta\in\Delta} \ker\delta = k$. *Пусть элементы* $y_1,\dots,y_s,z_1,\dots,z_s \in F^*$ *таковы, что*:

а) $\delta z_r/z_r - \delta y_r \in E$ *для всех* $\delta \in \Delta$, $r = 1,\dots,s$;

б) *любое нетривиальное произведение степеней* $z_1,\dots,z_s$ *не является алгебраичным над* E.

Тогда

$$\operatorname{tr}\deg_E E(y_1,\dots,y_s,z_1,\dots,z_s) \geqslant s.$$

Предположим, что функции $e^{c\tau_{jl}}$, $1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g$, алгебраически зависимы над $M(\boldsymbol{\tau})$. Согласно лемме 1 это предположение означает, что для всякого автоморфизма $\gamma \in \Gamma$ функции $e^{c\tau'_{jl}}$, $1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g$, где $(\tau'_{jl}) = \gamma(\tau_{jl})$, также алгебраически зависимы над $M(\boldsymbol{\tau})$. Поэтому, полагая $\boldsymbol{\tau}^{(m)} = (\tau_{jl}^{(m)}) = \gamma_m(\boldsymbol{\tau})$, $m = 0,1,\dots,t$, для любого набора $\gamma_0,\dots,\gamma_t \in \Gamma$, мы получаем оценку сверху

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\deg_{M(\boldsymbol{\tau})} M(\boldsymbol{\tau}, e^{c\boldsymbol{\tau}^{(0)}}, e^{c\boldsymbol{\tau}^{(1)}},\dots,e^{c\boldsymbol{\tau}^{(t)}}) &\leqslant \#\{\boldsymbol{\tau}^{(m)}\}_{m=0,1,\dots,t} - (t+1)\\ &= (t+1)n - (t+1).\end{aligned}$$

Обозначим теперь

$$\begin{gathered}k = \mathbb{C},\quad E = M,\quad F = M(\boldsymbol{\tau}, e^{c\boldsymbol{\tau}^{(0)}}, e^{c\boldsymbol{\tau}^{(1)}},\dots,e^{c\boldsymbol{\tau}^{(t)}}),\quad \Delta = \{\delta_{jl}\},\\ \{y_r\} = \{c\tau_{jl}^{(m)}\} \ \text{ и } \ z_r = e^{y_r},\qquad r = 1,\dots,s\end{gathered}$$

с $s = (t+1)n$, в предложении 1 и допустим, что условие б) выполнено. Условие а) предложения 1 выполнено автоматически, так как $\delta z_r/z_r - \delta y_r = 0$ для всех дифференцирований $\delta \in \Delta$ и любых $r = 1,\dots,s$; включение $\delta E \subseteq E$ следует из определения поля M. Тогда согласно теореме Акса

$$\operatorname{tr}\deg_M M(y_1,\dots,y_s,z_1,\dots,z_s) \geqslant s,\qquad \text{где} \quad s = (t+1)n.$$

Вспоминая, что $M(y_1,\dots,y_s) = M(c\boldsymbol{\tau}) = M(\boldsymbol{\tau})$ и величина $\operatorname{tr}\deg_M M(\boldsymbol{\tau})$ конечна (более точно, равна n), мы получем оценку снизу

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\deg_{M(\boldsymbol{\tau})} M(\boldsymbol{\tau}, e^{c\boldsymbol{\tau}^{(0)}}, e^{c\boldsymbol{\tau}^{(1)}},\dots,e^{c\boldsymbol{\tau}^{(t)}}) &= \operatorname{tr}\deg_{M(\boldsymbol{\tau})} M(y_1,\dots,y_s,z_1,\dots,z_s)\\ &\geqslant s - \operatorname{tr}\deg_M M(\boldsymbol{\tau}) = (t+1)n - n,\end{aligned}$$

противоречащую оценке сверху для достаточно большого t (именно, для $t \geqslant n$).

Таким образом, достаточно предъявить набор $\gamma_0,\gamma_1,\dots,\gamma_t \in \Gamma = Sp_{2g}(\mathbb{Z})$, для которого выполнено условие б) теоремы Акса. Как и в доказательстве из [2], выберем

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & -m\mathbf{1}_g \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}),\qquad m = 0,1,\dots,t.$$

Обозначим, как выше,

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = (\tau_{jl}^{(m)}) = \gamma_m(\boldsymbol{\tau}) = -(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1}$$

(т.е. $\tau_{jl}^{(m)} = \gamma_m \cdot \tau_{jl}$ в обозначениях § 2) и предположим, что условие б) предложения 1 не выполнено для соответствующего выбора $\{y_r\}$ и $\{z_r = e^{y_r}\}$. Тогда существует нетривиальное множество $\{C_{jl}^{(m)}\} \in \mathbb{Z}^{nt}$ такое, что рациональная функция

$$R(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g\\ 1\leqslant m\leqslant t}} C_{jl}^{(m)} c\tau_{jl}^{(m)}$$

удовлетворяет включению

$$e^{R(\boldsymbol{\tau})} \in M^{\mathrm{alg}},$$

где через M^{alg} обозначено алгебраическое замыкание поля M. Вычисляя логарифмические производные и пользуясь дифференциальной замкнутостью M, а значит, и M^{alg}, мы приходим к соотношениям

$$\frac{\partial R}{\partial \tau_{jl}}(\boldsymbol{\tau}) \in M^{\mathrm{alg}} \qquad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g.$$

Но поля M^{alg} и $\mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$ линейно разделены над $\mathbb{C}$, поскольку M и $\mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$ линейно разделены над $\mathbb{C}$ (см. формулу (2) из § 1), а $\mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$ является чисто трансцендентным расширением поля $\mathbb{C}$, так что из полученных соотношений следует, что

$$\frac{\partial R}{\partial \tau_{jl}}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{C} \qquad \text{для всех} \quad 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g.$$

Следовательно, для некоторого *многочлена* Q (степени не выше 1) выполнено

$$R = Q \in \mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}].$$

Рассмотрим теперь t многочленов

$$P_m(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g} C_{jl}^{(m)} c\tau_{jl}, \qquad m = 0, 1, \dots, t.$$

Для каждого m образ $R_m = \gamma_m \cdot P_m$ многочлена P_m под действием $\gamma_m \in \Gamma$ есть рациональная функция

$$R_m(\boldsymbol{\tau}) = P_m\bigl(-(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1}\bigr) = \sum_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g} C_{jl}^{(m)} c\tau_{jl}^{(m)}, \qquad m = 0, 1, \dots, t,$$

поскольку действие Γ на $\mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$ является $\mathbb{C}$-линейным. Значит, $R = \sum_{0\leqslant m\leqslant t} R_m$, и мы в итоге приходим к соотношению

$$\sum_{0\leqslant m\leqslant t} R_m = Q.$$

Многочлен Q может тождественно быть равным нулю, но числовое множество $\{C_{jl}^{(m)} c\} \in \mathbb{C}^{nt}$ нетривиально и, значит, хотя бы один из многочленов P_m, $m = 0, \dots, t$, ненулевой. Эти многочлены являются линейными формами, в частности не содержат свободные члены. Поэтому последнее соотношение противоречит следствию из леммы 3, и это противречие завершает доказательство теоремы 1.

§ 4. Аналитическое доказательство теоремы 2

4.1. Новое доказательство теоремы 1 в случае $g = 1$. В этом случае мы можем обойтись без дифференциальной алгебры. Напомним, что степень трансцендентности поля M над $\mathbb{C}$ конечна, и предположим, что теорема 1 неверна, т.е. функция $e^{c\tau}$ алгебраична над $M(\tau)$. Согласно лемме 1 поле $M(\tau)$ устойчиво под действием группы $\Gamma = Sp_2(\mathbb{Z}) = SL_2(\mathbb{Z})$. Поэтому для любого $\gamma \in \Gamma$ функция $e^{c\gamma(\tau)}$ также алгебраична над полем $M(\tau)$. Теперь мы утверждаем, что *если γ пробегает группу Γ, то функции $e^{c\gamma(\tau)}$ порождают над $\mathbb{C}$ поле конечной степени трансцендентности.*

Следовательно, все функции $e^{c\gamma(\tau)}$ не могут быть алгебраичными над полем $M(\tau)$ конечной степени трансцендентности, и это противоречие доказывает теорему 1 в случае $g = 1$.

Докажем сформулированное утверждение ($g = 1$). Основное наблюдение заключается в том, что функция $e^{c\tau}$ голоморфна во всей τ-плоскости, а не только в верхней полуплоскости $\mathfrak{H}_1$. Поэтому, выбирая элементы γ вида $\gamma_m = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -m \end{smallmatrix}\right)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, мы получаем, что для каждого m функция $e^{c\gamma_m(\tau)} = e^{-c/(\tau - m)}$ голоморфна всюду в $\mathbb{C}$, за исключением существенно особой точки $\tau = m$. Но любая такая функция f трансцендентна над полем функций, мероморфных в окрестности m (согласно теореме Сохоцкого–Вейерштрасса о плотности образа любой проколотой окрестности точки m под действием f). Следовательно, для каждого положительного целого t функция $e^{c\gamma_t(\tau)}$ трансцендентна над полем, порожденным над $\mathbb{C}$ предыдущими $e^{c\gamma_m(\tau)}$, $m = 0, 1, \dots, t - 1$, и доказательство утверждения завершается индукцией по t.

4.2. Доказательство теоремы 2. Вместо теоремы Акса, как это было в § 3, мы воспользуемся более простым результатом дифференциальной алгебры, полученным Е. Р. Колчиным (см. [7, ч. VI, § 5, упражнение 4 (b)]). Этот мультипликативный аналог теоремы Островского следует из того факта, что любая собственная подгруппа группы мультипликативного типа содержится в ядре нетривиального характера.

Предложение 2 (теорема Колчина). *Пусть $F \supseteq E \supseteq k \supseteq \mathbb{Q}$ – последовательность полей, Δ – множество дифференцирований поля F таких, что $\delta E \subseteq E$ для всех $\delta \in \Delta$, и $\bigcap_{\delta \in \Delta} \ker \delta = k$. Пусть элементы $z_1, \dots, z_s \in F^*$ алгебраически зависимы над E и $\delta z_r / z_r \in E$ для всех $\delta \in \Delta$ и $r = 1, \dots, s$. Тогда существуют числа $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{Z}$, не равные одновременно нулю, такие, что $z_1^{n_1} \cdots z_s^{n_s} \in E^*$.*

Пусть теперь выполнены все условия теоремы 2, и предположим от противного, что функции $e^{Q_1(\boldsymbol{\tau})}, \dots, e^{Q_N(\boldsymbol{\tau})}$ алгебраически зависимы над $M(\boldsymbol{\tau})$. Применяя предложение 2 к $\boldsymbol{\delta}$-дифференциальному полю $E = M(\boldsymbol{\tau})$ и функциям $z_r = e^{Q_r(\boldsymbol{\tau})}$ ($r = 1, \dots, s$ с $s := N$), мы получаем нетривиальное множество $\{c_1, \dots, c_N\} \in \mathbb{Z}^N$ такое, что многочлен

$$P(\boldsymbol{\tau}) = \sum_{1 \leqslant r \leqslant N} c_r Q_r(\boldsymbol{\tau})$$

удовлетворяет включению

$$e^{P(\boldsymbol{\tau})} \in M(\boldsymbol{\tau}).$$

Поскольку многочлены Q_r линейно независимы над $\mathbb{Q}$ и не содержат свободные члены, многочлен P ненулевой и тоже без свободных членов, так что согласно лемме 1 для любого $\gamma \in \Gamma$ функция $e^{(\gamma\cdot P)(\boldsymbol{\tau})} = e^{P(\gamma(\boldsymbol{\tau}))}$ также лежит в $M(\boldsymbol{\tau})$.

Рассматривая элементы Γ вида

$$\gamma_m = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_g & -\mathbf{1}_g \\ \mathbf{1}_g & -m\mathbf{1}_g \end{pmatrix} \in Sp_{2g}(\mathbb{Z}), \qquad m = 0, 1, \dots,$$

мы утверждаем, что *для любого положительного целого t функции $e^{\gamma_m \cdot P}$, $m = 0, \dots, t$, алгебраически независимы над $\mathbb{C}$.*

Следовательно, для достаточно большого t (более точно, для $t > \frac{1}{2}g(5g+3)$ в соответствии с формулой (2) из § 1) все указанные функции не могут лежать в поле $M(\boldsymbol{\tau})$ конечной степени трансцендентности. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 2.

Докажем утверждение ($g \geqslant 1$). Представляя многочлен P в виде суммы его ненулевых однородных компонент, отвечающих степеням $\geqslant 1$, согласно лемме 3 и факториальности кольца $\mathbb{C}[\boldsymbol{\tau}]$ заключаем, что дивизор в Z_g рациональной функции

$$R_m(\boldsymbol{\tau}) = \gamma_m \cdot P(\tau) = P\bigl(-(\boldsymbol{\tau} - m\mathbf{1}_g)^{-1}\bigr), \qquad m = 0, 1, \dots, t,$$

совпадает как множество с дивизором $\mathscr{D}_m$. Зафиксируем теперь точку $\tau' \in \mathscr{D}_t$, не принадлежащую полярным дивизорам функций $R_m = \gamma_m \cdot P$, $m = 0, 1, \dots, t-1$ (что возможно согласно следствию из леммы 2), а также нулевому дивизору функции R_t (т.е. отличную от точек неопределенности R_t) и множеству особенностей $\mathscr{D}_t$. Тогда функции $e^{R_m(\boldsymbol{\tau})}$, $m = 0, 1, \dots, t-1$, лежат в поле $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{\tau}'}$ ростков мероморфных в $\boldsymbol{\tau}'$ функций, и нам остается показать, что функция $f = e^{R_t}$ не может удовлетворять нетривиальному алгебраическому уравнению $S(f) = 0$ над $\mathfrak{M}_{\boldsymbol{\tau}'}$.

Рассмотрим аналитическую кривую $C \subset Z_g(\mathbb{C})$, пересекающую $\mathscr{D}_t$ трансверсально в точке $\boldsymbol{\tau}'$, росток которой в $\boldsymbol{\tau}'$ не содержится в нулевых и полярных дивизорах коэффициентов S, и обозначим

$$\phi \colon \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\} \to C, \qquad \phi(0) = \boldsymbol{\tau}',$$

параметризацию C. Ввиду трансверсальности и отсутствия неопределенности функции R_t в точке $\boldsymbol{\tau}'$, функция $f \circ \phi(z)$ одной переменной имеет существенно особую точку в нуле, в то время как прообразы коэффициентов S под действием ϕ являются ростками в 0 корректно определенных ненулевых мероморфных функций переменной z. Как было отмечено в п. 4.1, получающееся в результате алгебраическое соотношение для $f \circ \phi$ невозможно, что и завершает доказательство нашего утверждения.

Замечание 2. Применяя предложение 2 дважды, несложно превратить аргументы этого параграфа в чисто алгебраическое доказательство теоремы 2. Действительно, анализ возникает только при доказательстве утверждения. Но если это утверждение неверно, то повторное обращение к теореме Колчина (на этот раз с $E = \mathbb{C}(\boldsymbol{\tau})$) и тот факт, что ненулевые логарифмические дифференциалы на аффинном пространстве Z_g не являются точными, влекут линейную независимость рациональных функций $R_m(\boldsymbol{\tau})$, $m = 0, 1, \dots, t$, над $\mathbb{Z} \bmod \mathbb{C}$. Это противоречит следствию из леммы 3, примененному к многочленам $P_0 = \dots = P_t := P$ и $Q = 1$.

Замечание 3. Подобным образом при выводе теоремы 1 из теоремы Акса в § 3 мы воспользовались следствием из леммы 3 только для линейных форм $P_0, \ldots, P_t$ (этот случай допускает более простое доказательство, опирающееся только на лемму 2). Мы оставляем читателю проверку того, что применение следствия из леммы 3 в полном объеме и аргументов из § 3 позволяет доказать теорему 2. (Необходимо всюду в § 3 заменить n линейных форм τ_{jl} на N многочленов Q_r теоремы 2, а $\tau_{jl}^{(m)} = \gamma_m \cdot \tau_{jl}$ на $\gamma_m \cdot Q_r$.)

Замечание 4. Самое главное отличие между доказательствами § 3 и § 4 заключается в том, какие именно аргументы из работы [3] мы используем: в § 3 нам только необходимо знать, что $M(\boldsymbol{\tau})$ – чисто трансцендентное расширение M, в то время как аргументы § 4 основаны исключительно на конечности степени трансцендентности поля M над $\mathbb{C}$. (Разумеется, в обоих случаях нашим основным аргументом является устойчивость поля $M(\boldsymbol{\tau})$ под действием Γ.)

§ 5. Тэта-константы и их логарифмические производные

Полагая

$$q_{jl} = e^{2\pi i \tau_{jl}}, \quad 1 \leqslant j < l \leqslant g, \qquad \text{и} \qquad q_{jj} = e^{\pi i \tau_{jj}}, \quad 1 \leqslant j \leqslant g,$$

рассмотрим модулярные формы, именно *тэта-константы*

$$\vartheta_{\boldsymbol{a}} = \vartheta_{(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'')}(\boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i\, {}^t(\boldsymbol{n} + \boldsymbol{a}'/2)\boldsymbol{a}''} \prod_{1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g} q_{jl}^{(n_j + a_j'/2)(n_l + a_l'/2)},$$

отвечающие четным 2-характеристикам $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') \in \mathfrak{K}_+ \subset (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2g}$, т.е. с ${}^t\boldsymbol{a}' \cdot \boldsymbol{a}'' \equiv 0 \pmod 2$. Эти ряды сходятся в некоторой нетривиальной области $\boldsymbol{q}$-пространства, где $\boldsymbol{q} = \{q_{jl},\ 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g\} \in \mathbb{C}^n$, но мы будем считать их формальными элементами кольца

$$\mathfrak{F}_{\boldsymbol{q}} = \mathbb{C}[[\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}},\ 4\boldsymbol{\nu} \in Z_g(\mathbb{Z}),\ \boldsymbol{\nu} \geqslant 0]].$$

(Для согласования со стандартными разложениями Фурье мы используем обозначение $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}} = e^{i\pi \operatorname{Tr}(\boldsymbol{\nu\tau})}$.)

Множество частных производных $\boldsymbol{\delta}$ преобразуется теперь в

$$\delta_{jl} = q_{jl} \frac{\partial}{\partial q_{jl}}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g,$$

и превращает $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{q}}$ в дифференциальное кольцо. Определим *логарифмические производные тэта-констант* формулами

$$\psi_{\boldsymbol{a}, jl} = \frac{\delta_{jl}\vartheta_{\boldsymbol{a}}}{\vartheta_{\boldsymbol{a}}}, \qquad \boldsymbol{a} \in \mathfrak{K}_+, \quad 1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g.$$

Поскольку

$$\vartheta_{\boldsymbol{a}} = 1 + \sum_{\boldsymbol{0} \neq \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g} (-1)^{{}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}''} \prod_{1 \leqslant j \leqslant l \leqslant g} q_{jl}^{n_j n_l}, \qquad \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a}', \boldsymbol{a}'') : \boldsymbol{a}' = 0, \tag{3}$$

n логарифмических производных, отвечающих 2^g функциям

$$\psi_{\boldsymbol{a},pq}=\sum_{\mathbf{0}\ne\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^g}(-1)^{{}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}''}n_pn_q\prod_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g}q_{jl}^{n_jn_l}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\Biggl(-\sum_{\mathbf{0}\ne\boldsymbol{n}\in\mathbb{Z}^g}(-1)^{{}^t\boldsymbol{n}\boldsymbol{a}''}\prod_{1\leqslant j\leqslant l\leqslant g}q_{jl}^{n_jn_l}\Biggr)^m$$

($1\leqslant p\leqslant q\leqslant g$), лежат в кольце $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{q}}$, в то время как логарифмические производные остальных тэта-констант ($\boldsymbol{a}'\ne 0$) лежат в поле частных кольца $\mathfrak{F}_{\boldsymbol{q}}$.

Согласно [3, § 5] поле частных кольца

$$Q_g=\mathbb{Q}[\vartheta_{\boldsymbol{a}},\psi_{\boldsymbol{a},jl}]_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{K}_+;1\leqslant j\leqslant l\leqslant g}$$

является $\boldsymbol{\delta}$-устойчивым и его алгебраическое замыкание совпадает с M. Поэтому из теоремы 1 следует

Теорема 3. *Поле частных кольца*

$$\Pi_g=\mathbb{Q}[q_{jl},\vartheta_{\boldsymbol{a}},\psi_{\boldsymbol{a},jl}]_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{K}_+;1\leqslant j\leqslant l\leqslant g}$$

устойчиво под действием дифференцирований $\boldsymbol{\delta}$ *и имеет степень трансцендентности* $\frac{1}{2}g(5g+3)$ *над* $\mathbb{Q}$.

В классическом случае $g=1$, а также в случае $g=2$ само *кольцо* Q_g является устойчивым под действием дифференцирований $\boldsymbol{\delta}$ (см. [3, § 6]); значит, это свойство справедливо также для колец Π_1 и Π_2. Более того, в случае $g=1$ формула произведения для тэта-констант ϑ_a (см., например, [8, § 21.42]) дает явные выражения для q-разложений соответствующих логарифмических производных ψ_a. Недавние результаты Борчердса показывают, что в этом направлении также существует некоторая аналогия между классическим случаем и $g=2$. Мы подытожим эту статью объяснением того, как с помощью формулы Борчердса выписать явные $\boldsymbol{q}$-разложения десяти элементов, образующих согласно [3, теорема 3 (iv)] базис трансцендентности поля Q_2 над $\mathbb{Q}$, значит (по теореме 3), и поля Π_2 над $\mathbb{Q}[\boldsymbol{q}]$.

Всюду далее мы считаем $g=2$. Как и в [3, § 6], мы воспользуемся для простоты отображением $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\to\{0,1,2,3\}$:

$$(0,0)\mapsto 0,\quad (0,1)\mapsto 1,\quad (1,0)\mapsto 2,\quad (1,1)\mapsto 3,$$

для представления характеристики $\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}',\boldsymbol{a}'')\in(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ только двумя цифрами. Тогда $\mathfrak{K}_+=\{00,01,02,03,10,12,20,21,30,33\}$. Перенумеруем элементы $\boldsymbol{q}$, полагая $q_1=q_{11}$, $q_2=q_{22}$, $q_3=q_{12}$, и проделаем то же самое с дифференцированиями

$$\delta_j=q_j\frac{\partial}{\partial q_j},\qquad j=1,2,3,$$

и с логарифмическими производными $\psi_{\boldsymbol{a},j}$. В этих обозначениях указанный выше базис трансцендентности для Q_2 задается списком

$$\vartheta_{00},\vartheta_{01},\vartheta_{02},\quad \psi_{00,1},\psi_{01,1},\psi_{02,1},\quad \psi_{00,2},\psi_{01,2},\psi_{02,2},\quad \psi_{00,3}. \tag{4}$$

Наконец, через Z_2^+ мы обозначим пространство неотрицательно определенных симметрических матриц $\boldsymbol{\nu}=\left(\begin{smallmatrix}\nu_1&\nu_3\\ \nu_3&\nu_2\end{smallmatrix}\right)$ с элементами $\nu_1,\nu_2,2\nu_3\in\mathbb{Z}$, для которых, как и выше, положим $\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}=q_1^{\nu_1}q_2^{\nu_2}q_3^{\nu_3}$. Тогда выполнено (см. [9, § 4])

Предложение 3 (формула произведения Борчердса). *Справедливо следующее тождество*:

$$\vartheta_{03}(\boldsymbol{q}) = \sum_{n_1,n_2\in\mathbb{Z}} (-1)^{n_1+n_2} q_1^{n_1^2} q_2^{n_2^2} q_3^{n_1 n_2} = \prod_{\mathbf{0}_2\neq\boldsymbol{\nu}\in Z_2^+} \left(\frac{1-\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}{1+\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}\right)^{f(\det\boldsymbol{\nu})}, \tag{5}$$

где

$$\sum_{m=0}^{\infty} f(m)q^m = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{n^2}\right)^{-1} = 1+2q+4q^2+8q^3+14q^4+24q^5+\cdots$$

есть обращение одномерной тэта-константы $\vartheta_{01}(q)$.

Делая подстановки $q_1 \mapsto -q_1$ и $q_2 \mapsto -q_2$ в (5) и (3), находим формулы произведения для трех оставшихся тэта-констант с $\boldsymbol{a}'=0$:

$$\vartheta_{01} = \prod_{\mathbf{0}_2\neq\boldsymbol{\nu}\in Z_2^+} \left(\frac{1-(-1)^{\nu_1}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}{1+(-1)^{\nu_1}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}\right)^{f(\det\boldsymbol{\nu})}, \quad \vartheta_{02} = \prod_{\mathbf{0}_2\neq\boldsymbol{\nu}\in Z_2^+} \left(\frac{1-(-1)^{\nu_2}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}{1+(-1)^{\nu_2}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}\right)^{f(\det\boldsymbol{\nu})},$$
$$\vartheta_{00} = \prod_{\mathbf{0}_2\neq\boldsymbol{\nu}\in Z_2^+} \left(\frac{1-(-1)^{\nu_1+\nu_2}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}{1+(-1)^{\nu_1+\nu_2}\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}\right)^{f(\det\boldsymbol{\nu})}. \tag{6}$$

Явные формулы для $\boldsymbol{q}$-разложений логарифмических производных этих тэта-констант очевидным образом следуют из (5), (6). Так, например, в случае $\boldsymbol{a}''=3$ и $j=1,2,3$ мы получаем

$$\begin{aligned}\psi_{03,j} = \frac{\delta_j\vartheta_{03}}{\vartheta_{03}} &= -2\sum_{\mathbf{0}_2\neq\boldsymbol{\nu}\in Z_2^+} \frac{\nu_j f(\det\boldsymbol{\nu})\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\nu}}}{1-\boldsymbol{q}^{2\boldsymbol{\nu}}}\\ &= -2\sum_{\mathbf{0}_2\neq\boldsymbol{\mu}\in Z_2^+} \boldsymbol{q}^{\boldsymbol{\mu}}\left(\sum_{\substack{\boldsymbol{\nu}\in Z_2^+:(2m+1)\boldsymbol{\nu}=\boldsymbol{\mu}\\ m\in\mathbb{Z},m\geqslant 0}} \nu_j f(\det\boldsymbol{\nu})\right).\end{aligned}$$

Тем самым формулы (3) и (6) приводят к обещанным $\boldsymbol{q}$-разложениям всех элементов из нашего списка (4).

Замечание 5. В случае $g=2$ разложения в бесконечные произведения существуют и для других тэта-констант, не входящих в изученную выше четверку. В качестве примера отметим тэта-константу ϑ_{33} (см. [10, пример 2.3], где она названа "максимально нечетной среди четных"). Кроме того, в [10, пример 2.4] приводится разложение в бесконечное произведение модулярной формы веса 5, заданной формулой $\prod_{\boldsymbol{a}\in\mathfrak{K}_+}\vartheta_{\boldsymbol{a}}$.

Список литературы

1. *Mahler K.* On algebraic differential equations satisfied by automorphic functions // J. Austral. Math. Soc. 1969. V. 10. P. 445–450.
2. *Nishioka K.* A conjecture of Mahler on automorphic functions // Arch. Math. (Basel). 1989. V. 53. № 1. P. 46–51.
3. *Bertrand D., Zudilin W.* On the transcendence degree of the differential field generated by Siegel modular forms // Prépubl. de l'Institut de Math. de Jussieu. V. 248, 2000; // `http://xxx.lanl.gov/abs/math/0006176`.
4. *Zudilin W.* Number theory casting a look at the mirror. Preprint, 2000 (submitted for publication); `http://xxx.lanl.gov/abs/math/0008237`.
5. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. *Ax J.* On Schanuel's conjectures // Ann. of Math. (2). 1971. V. 93. P. 252–268.
7. *Kolchin E. R.* Differential algebra and algebraic groups. Pure Appl. Math. V. 54. N. Y.–London: Academic Press, 1973.
8. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматлит, 1963.
9. *Kontsevich M.* Product formulas for modular forms on $O(2,n)$ (after R. Borcherds) [Exp. no. 821] // Astérisque 1997. V. 245. P. 41–56; // Sém. Bourbaki. V. 1996/97. Exp. 820–834, `http://xxx.lanl.gov/abs/alg-geom/9709006`.
10. *Gritsenko V. A., Nikulin V. V.* Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. Part II // Internat. J. Math. 1998. V. 9. № 2. P. 201–275.

(Д. Бертран) Institut de Mathématiques de Jussieu, Paris
(В. В. Зудилин) Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `bertrand@math.jussieu.fr, wadim@ips.ras.ru`

Поступило в редакцию 26.XII.2000