Больше формул рамануджанова типа для $1/\pi^2$

В. В. Зудилин

Одним из ярких достижений в истории числа π являются представления $1/\pi$ в виде быстро сходящихся рядов, открытые Ш. Рамануджаном [1] в 1914 г. Хотя сам Рамануджан не объяснил, каким образом он получил эти ряды, он указал на то, что они связаны с так называемыми в современной терминологии 'теориями эллиптических функций с альтернативными базами'. Первые математически строгие доказательства тождеств Рамануджана из [1], включая обобщения, были получены Дж. и П. Борвейнами [2] и Д. и Г. Чудновскими [3] (см. также [4] и [5]). Одним из стандартных в наши дни примеров формулы рамануджанова типа является знаменитая формула Чудновских [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{6})_n(\frac{1}{2})_n(\frac{5}{6})_n}{n!^3}(545140134n+13591409)\cdot\frac{(-1)^n}{53360^{3n}}=\frac{3\cdot 53360^2}{2\pi\sqrt{10005}}, \tag{1}$$

которая позволила им удерживать рекорд вычисления π на протяжении 1989–94 гг. Здесь $(a)_n=\Gamma(a+n)/\Gamma(a)=a(a+1)\cdots(a+n-1)$ при $n\geqslant 1$ и $(a)_0=1$ – символ Похгаммера. Совсем недавно с помощью другого метода Х. Гиллере [6], [7] удалось не только доказать некоторые тождества Рамануджана, но и вывести аналогичные быстро сходящиеся ряды для $1/\pi^2$. В настоящей заметке мы указываем простой алгоритм генерирования формул типа Рамануджана–Гиллеры для $1/\pi^2$ на основе известных формул для $1/\pi$.

Общая форма рамануджанова ряда для $1/\pi$ имеет следующий вид:

$$\alpha\cdot v(z_0)+\beta\cdot\theta v(z_0)=\frac{1}{\pi},\quad \theta=z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}, \tag{2}$$

где α, β и z_0 – некоторые алгебраические числа, а $v(z)$ – аналитическое решение (в окрестности нуля) некоторого 'арифметически хорошего' линейного дифференциального уравнения 3-го порядка, нормализованное условием $v(0)=1$. Такое дифференциальное уравнение *всегда* является (симметрическим) квадратом дифференциального уравнения 2-го порядка, скажем $\theta^2u+A(z)\theta u+B(z)u=0$, $A(z),B(z)\in\mathbb{Q}(z)$. Иными словами, выполнено $v(z)=u(z)^2$, где $u(z)$ – аналитическое решение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. В частности, отсюда получаем

$$v=u^2,\quad \theta v=2u\,\theta u. \tag{3}$$

Рассмотрим четвертую степень того же самого дифференциального уравнения 2-го порядка. Его аналитическое в окрестности нуля решение имеет вид $w(z)=u(z)^4$, так что

$$w=u^4,\quad \theta w=4u^3\theta u,\quad \theta^2w=12u^2(\theta u)^2+4u^3\theta^2u=12u^2(\theta u)^2-4Au^3\theta u-4Bu^4. \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), находим

$$v^2=w,\quad v\,\theta v=\frac{1}{2}\theta w,\quad (\theta v)^2=\frac{4}{3}Bw+\frac{1}{3}A\theta w+\frac{1}{3}\theta^2w. \tag{5}$$

Возводя обе части равенства (2) в квадрат и используя (5), мы в итоге приходим к равенству

$$\Bigl(\alpha^2+\frac{4}{3}B(z_0)\beta^2\Bigr)\cdot w(z_0)+\Bigl(\alpha+\frac{1}{3}A(z_0)\beta\Bigr)\beta\cdot\theta w(z_0)+\frac{1}{3}\beta^2\cdot\theta^2w(z_0)=\frac{1}{\pi^2}, \tag{6}$$

которое и является формулой для $1/\pi^2$ типа Рамануджана–Гиллеры. Ясно, что возведение обеих частей (2) в куб, четвертую степень и т.д. приводит к аналогичным (но более громоздким) формулам для $1/\pi^3$, $1/\pi^4$, $\dots$.

Работа выполнена при поддержке стипендии Института математики им. Макса Планка (Бонн) и частичной поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

Два иллюстрирующих примера связаны с тождествами

$$w(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{(\frac13)_n(\frac23)_n}{n!^2}z^n={}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac16,\ \frac12,\ \frac56\\ 1,\ 1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)^2={}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac1{12},\ \frac5{12}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)^4$$

для гипергеометрических рядов ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$ (см. соответствующее определение, например, в [8]); здесь последовательность

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\frac12)_k^3}{k!^3}\,\frac{(\frac12)_{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(\frac14)_k(\frac34)_{n-k}}{k!(n-k)!}\right)^2$$

удовлетворяет полиномиальному рекуррентному уравнению

$$8(n+1)^3a_{n+1}-(2n+1)(8n^2+8n+5)a_n+8n^3a_{n-1}=0$$

(см. [9; п. 1]). Функция $u(z)={}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac1{12},\ \frac5{12}\\ 1\end{matrix}\,\middle|\,z\right)$ является аналитическим решением дифференциального уравнения

$$\theta^2u-\frac{z}{2(1-z)}\theta u-\frac{5z}{144(1-z)}u=0.$$

Записывая формулу Чудновских (1) в виде

$$545140134\cdot\theta v(z_0)+13591409\cdot v(z_0)=\frac{3\cdot53360^2}{2\pi\sqrt{10005}},$$
$$\text{где}\quad z_0=-\frac{1}{53360^3}=-\frac{1}{(2^4\cdot5\cdot23\cdot29)^3},$$

согласно (6) имеем

$$222883324273153467\cdot\theta^2w(z_0)+16670750677895547\cdot\theta w(z_0)$$
$$+415634396862086\cdot w(z_0)=\frac{160080^3}{\pi^2}.$$

Менее громоздкий пример основан на формуле рамануджанова типа [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac16)_n(\frac12)_n(\frac56)_n}{n!^3}(5418n+263)\cdot\frac{(-1)^n}{80^{3n}}=5418\cdot\theta v(z_0)+263\cdot v(z_0)=\frac{640\sqrt{15}}{3\pi},\qquad(7)$$

где $z_0=-1/80^3$. Возводя (7) в квадрат, получаем

$$198144387\cdot\theta^2w(z_0)+28855107\cdot\theta w(z_0)+1400726\cdot w(z_0)=\frac{240^3}{\pi^2}.$$

Список литературы

[**1**] S. Ramanujan, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **45** (1914), 350–372; *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927, 1962, 23–39. [**2**] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, Wiley, New York, 1987. [**3**] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *Ramanujan revisited* (Urbana-Champaign, Ill., 1987), Academic Press, Boston, MA, 1988, 375–472. [**4**] H. H. Chan, W.-C. Liaw, V. Tan, *J. London Math. Soc.* (2), **64**:1 (2001), 93–106. [**5**] H. H. Chan, S. H. Chan, Z. Liu, *Adv. Math.*, **186**:2 (2004), 396–410. [**6**] J. Guillera, *Adv. in Appl. Math.*, **29**:4 (2002), 599–603. [**7**] J. Guillera, *Ramanujan J.*, **11**:1 (2006), 41–48. [**8**] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966. [**9**] В. В. Зудилин, *Матем. заметки*, **81**:3 (2007), 335–340.

В. В. Зудилин (W. Zudilin)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: wadim@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
23.04.2007