Математические заметки

том 71 выпуск 5 май 2002

УДК 511.21+517.588

О ЦЕЛОЧИСЛЕННОСТИ СТЕПЕННЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ, СВЯЗАННЫХ С ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИМИ РЯДАМИ

В. В. Зудилин

В настоящей работе исследуются арифметические свойства степенных разложений, связанных с обобщенными гипергеометрическими дифференциальными уравнениями и рядами. Определяя ряды $f(z), g(z)$ по степеням z таким образом, что $f(z)$ и $f(z)\log z+g(z)$ удовлетворяют гипергеометрическому уравнению при специальном выборе параметров, мы доказываем, что ряд $q(z)=ze^{g(Cz)/f(Cz)}$ по степеням z и его обращение $z(q)$ по степеням q имеют целочисленные коэффициенты (постоянная C зависит от параметров гипергеометрического уравнения). Целочисленность разложения $z(q)$ для дифференциальных уравнений второго и третьего порядка является классическим результатом; для порядка выше 3 частичные результаты были недавно установлены Лианом и Яу. В своем доказательстве, пользуясь p-адической техникой Дворка, мы обобщаем схему их рассуждений.

Библиография: 11 названий.

1. Введение. Зафиксируем произвольное целое число $N\geqslant 2$, и пусть $N=p_1^{s_1}\times p_2^{s_2}\cdots p_l^{s_l}$ – его разложение на простые множители, а целые $q_1,q_2,\dots,q_k$, $1=q_1<q_2<\dots<q_k<N$, образуют полный набор остатков при делении на N, взаимно простых с самим числом N. Количество чисел k в этом наборе задается хорошо известной формулой

$$k=N\biggl(1-\frac{1}{p_1}\biggr)\biggl(1-\frac{1}{p_2}\biggr)\cdots\biggl(1-\frac{1}{p_l}\biggr) \tag{1}$$

(см., например, [1, отд. 8, задача 25]). В заданных обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для целого $N\geqslant 2$ определим положительную постоянную*

$$C_N:=N^k\cdot\prod_{p\mid N}p^{k/(p-1)}=\biggl(\prod_{j=1}^{l}p_j^{s_j+1/(p_j-1)}\biggr)^k, \tag{2}$$

которая является целым числом, поскольку $(p-1)\mid k$ для любого $p\mid N$ согласно (1). Тогда для любого целого $m\geqslant 0$ число

$$A(m)=A_N(m):=C_N^m\cdot\frac{(q_1/N)_m(q_2/N)_m\cdots(q_k/N)_m}{m!^k} \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке объединенного проекта фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № IR-97-1904, и Государственной научной стипендии Российской АН для молодых ученых.

является целым (положительным) числом. Здесь $(x)_m = x(x+1)\cdots(x+m-1)$ *для* $m \geqslant 1$ *и* $(x)_m = 1$ *обозначает символ Похгаммера.*

Мы доказываем это утверждение в п. 3, но для иллюстрации приведем два простых частных случая. Если $N = p^s$ является степенью простого и, значит, $k = p^s - p^{s-1}$, то выбор $C_N = p^{sp^s-(s-1)p^{s-1}}$ приводит к целым числам

$$A(m) = \frac{(p^s m)!}{(p^{s-1}m)!\,m!^{p^s-p^{s-1}}}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Если $N = p_1 p_2$, то $k = (p_1-1)(p_2-1)$ и выбор $C_N = p_1^{p_1(p_2-1)} p_2^{(p_1-1)p_2}$ дает целые числа

$$A(m) = \frac{(p_1 p_2 m)!}{(p_1 m)!\,(p_2 m)!\,m!^{p_1p_2-p_1-p_2}}, \qquad m = 0, 1, 2, \dots .$$

Согласно лемме 1 обобщенный гипергеометрический ряд

$$f(z) = f_N(z) := {}_kF_{k-1}\left(\begin{matrix} q_1/N, q_2/N, \dots, q_{k-1}/N, q_k/N \\ 1, \quad 1, \dots, \quad 1 \end{matrix}\,\middle|\, C_N \cdot z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} A(m) z^m \tag{4}$$

имеет целые коэффициенты в разложении по степеням z.

Полагая

$$\begin{aligned} D(x,m) &= \frac{d}{dx}\log(x)_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{x+n-1}, \qquad x \in (0,1], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \\ D(m) &= D_N(m) := \sum_{j=1}^{k} D\left(\frac{q_j}{N}, m\right) - kD(1,m), \qquad m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \tag{5}$$

рассмотрим также степенной ряд

$$g(z) = g_N(z) := \sum_{m=0}^{\infty} A(m)D(m)z^m = \sum_{m=1}^{\infty} A(m)D(m)z^m, \tag{6}$$

коэффициенты которого, вообще говоря, уже не являются целыми числами. Оба ряда (5), (6) сходятся в окрестности точки $z = 0$ (более точно, при $|z| < 1/C_N$); кроме того, при $N > 2$ в этой окрестности функции $f(z)$ и $f(z)\log z + g(z)$ являются линейно независимыми решениями линейного однородного дифференциального уравнения

$$\left(\left(z\frac{d}{dz}\right)^k - C_N \cdot z\left(z\frac{d}{dz} + \frac{q_1}{N}\right)\left(z\frac{d}{dz} + \frac{q_2}{N}\right)\cdots\left(z\frac{d}{dz} + \frac{q_k}{N}\right)\right)y = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) является обобщенным гипергеометрическим уравнением, решения которого обладают *максимальной унипотентной монодромией* в смысле Моррисона (см. [2, §1], [3, §4.2]).

Теорема 1. *Пусть для заданного целого $N \geqslant 2$ степенные ряды $f(z) = f_N(z)$, $g(z) = g_N(z)$ определяются формулами* (3)–(6). *Тогда коэффициенты степенного разложения*

$$q(z) := \exp\left(\frac{f(z)\log z + g(z)}{f(z)}\right) = z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

В случае простого N данная теорема была доказана Лианом и Яу [4, теорема 5.5] с помощью p-адической техники Дворка [5]. В настоящей работе мы упрощаем метод работы [4] и доказываем более общие результаты. Однако, по-настоящему общее утверждение, мотивированное результатами работы [5] и численными экспериментами, может быть сформулировано в следующем виде.

Гипотеза. *Пусть $N_1, N_2, \dots, N_r$ – целые числа, $N_j \geqslant 2$ для всех $j = 1, \dots, r$; числовым последовательностям*

$$A(m) = A_{N_1}(m) A_{N_2}(m) \cdots A_{N_r}(m), \qquad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{8}$$

$$D(m) = D_{N_1}(m) + D_{N_2}(m) + \dots + D_{N_r}(m), \qquad m = 0, 1, 2, \dots, \tag{9}$$

отвечают степенные ряды

$$f(z) := \sum_{m=0}^{\infty} A(m) z^m, \qquad g(z) := \sum_{m=1}^{\infty} A(m) D(m) z^m. \tag{10}$$

Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

Следствие. *Для произвольного $N \geqslant 2$ определим степенные ряды*

$$f(z) := {}_{N-1}F_{N-2}\left(\begin{matrix} 1/N, 2/N, \dots, (N-2)/N, (N-1)/N \\ 1, \quad 1, \dots, \qquad\qquad 1 \end{matrix} \,\middle|\, N^N \cdot z\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(Nm)!}{m!^N} z^m, \tag{11}$$

$$g(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(Nm)!}{m!^N} \left(\sum_{j=1}^{N-1} D\left(\frac{j}{N}, m\right) - (N-1) D(1, m)\right) z^m.$$

Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

являются целыми числами.

Для вывода следствия достаточно в качестве набора целых чисел $\{N_j\}_{j=1,\dots,r}$ в условиях гипотезы выбрать

$$\bigl\{p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_l^{\alpha_l} : 0 \leqslant \alpha_j \leqslant s_j,\ j = 1, \dots, l,\ \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_l > 0\bigr\},$$

где $N = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \cdots p_l^{s_l}$ – разложение числа N на простые множители.

Наш вклад в частичное решение гипотезы может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $N_1, N_2, \dots, N_r$ – *целые числа*, $N_j \geqslant 2$, *при этом любое простое* p, *делящее произведение* $N_1 N_2 \cdots N_r$, *делит каждое* N_j, $j = 1, \dots, r$ (*например*, $N_1 = N_2 = \dots = N_r$). *Определим степенные ряды* $f(z), g(z)$ *в соответствии с формулами* (8)–(10). *Тогда коэффициенты степенного разложения*

$$q(z) := z \cdot \exp\biggl(\frac{g(z)}{f(z)}\biggr)$$

являются целыми числами.

Из теоремы 2 мы получаем справедливость следствия из гипотезы для любого целого, являющегося степенью простого: $N = p^s$.

Теорема 3. *Пусть* $r \geqslant 1$ *целое и* $N = p^s$ *для простого* p *и целого* $s \geqslant 1$, *степенные ряды* $f(z)$ *и* $g(z)$ *определяются формулами*

$$\begin{aligned} f(z) &:= \sum_{m=0}^{\infty} \biggl(\frac{(Nm)!}{m!^N}\biggr)^r z^m, \\ g(z) &:= r \sum_{m=1}^{\infty} \biggl(\frac{(Nm)!}{m!^N}\biggr)^r \biggl(\sum_{j=1}^{N-1} D\Bigl(\frac{j}{N}, m\Bigr) - (N-1) D(1,m)\biggr) z^m. \end{aligned} \tag{12}$$

Тогда коэффициенты степенного разложения

$$q(z) := z \cdot \exp\biggl(\frac{g(z)}{f(z)}\biggr)$$

являются целыми числами.

Доказательство. Выбирая r копий множества $\{p^\alpha\}_{1 \leqslant \alpha \leqslant s}$ в качестве набора $\{N_j\}$ в теореме 2, получаем требуемое утверждение.

Гипергеометрические ряды $f(z)$ из (4), (10)–(12) и линейные дифференциальные уравнения, которым они удовлетворяют, естественным образом появляются в геометрии многообразий Калаби–Яу. Так, например, периоды семейства ($N-2$)-мерных гиперповерхностей

$$\mathscr{Q}_\psi := \bigl\{x_1^N + \dots + x_N^N - N\psi x_1 \cdots x_N = 0\bigr\} \subset \mathbb{P}^{N-1}$$

как функции от $z = (N\psi)^{-N}$ удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению, что и ряд (11) (см., например, [6, следствие (2.3.8.1)], [7, §8.3]). Обращение $z(q)$ ряда $q(z) = ze^{g(z)/f(z)}$, представляющее аналитическую функцию в некоторой окрестности $q = 0$, называется *зеркальным отображением* для соответствующего семейства гиперповерхностей.

Лемма 2. *Если степенной ряд* $q(z) = z + O(z^2)$ *имеет целочисленные коэффициенты, то его обращение* $z(q) = q + O(q^2)$ *обладает тем же свойством.*

Из теорем 1, 2 и леммы 2 вытекает целочисленность степенных разложений для большого класса зеркальных отображений. Так, полагая $N = 8$ и $N = 10$ в теореме 1, мы получаем целочисленность зеркальных отображений, отвечающих семействам гиперповерхностей

$$
\begin{aligned}
\mathscr{Q}_\psi^{(8)} &:= \bigl\{x_1^2+x_2^8+x_3^8+x_4^8+x_5^8-8\psi x_1x_2x_3x_4x_5=0\bigr\}\subset\mathbb{P}^4[4,1,1,1,1],\\
\mathscr{Q}_\psi^{(10)} &:= \bigl\{x_1^2+x_2^5+x_3^{10}+x_4^{10}+x_5^{10}-10\psi x_1x_2x_3x_4x_5=0\bigr\}\subset\mathbb{P}^4[5,2,1,1,1]
\end{aligned}
$$

соответственно в весовых проективных пространствах (подробную информацию об этих семействах можно найти, например, в [2, §4]). Отметим также, что для малых значений N в теореме 1 или $N_1N_2\cdots N_r$ в теореме 2 (а именно, когда соответствующее дифференциальное уравнение имеет порядок 2 или 3) целочисленность ряда $z(q)$ объясняется тем, что представляемая рядом функция является модулярной как функция от $\tau=\frac{1}{\pi i}\log q$ (см. [8, §1]).

Настоящая работа устроена следующим образом. В следующем пункте мы редуцируем доказательство теорем 1, 2 к арифметической проблеме p-адического анализа. В п. 3 мы приводим доказательство лемм 1, 2 и необходимые для дальнейшего сведения из p-адической техники Дворка [5]. Наконец, в п. 4 мы доказываем основные результаты этой работы.

Тематика настоящей статьи легла в основу серии специальных семинаров по диофантовым приближениям и трансцендентным числам, организованных на механико-математическом факультете МГУ. Автор благодарит всех участников этих семинаров за ряд ценных замечаний и упрощений, появившихся в результате подробного обсуждения доказательства теорем 1, 2.

2. p-адическая редукция теорем 1, 2. Пусть p – простое число. Обозначим через $\operatorname{ord}_p\xi$ p-адический порядок числа $\xi\in\mathbb{Q}$ (степень вхождения p в несократимую дробь для ξ); величина $\operatorname{ord}_p\xi$ может принимать любое целочисленное значение, для $\xi=0$ полагаем $\operatorname{ord}_p\xi=+\infty$. Замыкание поля $\mathbb{Q}$ относительно неархимедовой нормы $|\xi|_p=p^{-\operatorname{ord}_p\xi}$ обозначается через $\mathbb{Q}_p$; все элементы ζ поля $\mathbb{Q}_p$ (и, в частности, все элементы исходного поля $\mathbb{Q}$) обладают однозначным разложением

$$\zeta=p^r(c_0+c_1p+c_2p^2+\cdots+c_np^n+\cdots), \tag{13}$$

где $r=\operatorname{ord}_p\zeta\in\mathbb{Z}$ и $0\leqslant c_n<p$ для всех $n=0,1,2,\dots$ и сходимость в (13) понимается в смысле нормы $|\cdot|_p$ (см., например, [9, гл. I, §4]). Разложение (13) называется *p-адической записью* числа ζ. Множество элементов $\zeta\in\mathbb{Q}_p$, удовлетворяющих условию $\operatorname{ord}_p\zeta\geqslant0$, образует кольцо $\mathbb{Z}_p$. Класс чисел $\zeta\in\mathbb{Q}_p$, для которых $r\geqslant s$ в записи (13), обозначим через $O(p^s)$.

Лемма 3. *Пусть рациональное число ξ является элементом $\mathbb{Z}_p$ для любого простого p. Тогда ξ – целое число.*

Доказательство. Достаточно привести доказательство для $\xi\ne0$. Разложения числителя и знаменателя несократимой дроби для ξ на простые множители индуцируют разложение на простые самого числа: $\xi=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_l^{s_l}$. При этом $\operatorname{ord}_{p_j}\xi=s_j\geqslant0$ для $j=1,\dots,l$, поскольку $\xi\in\mathbb{Z}_{p_j}$ по условию. Тем самым, число ξ является произведением простых чисел в целых неотрицательных степенях, т.е. $\xi\in\mathbb{Z}$, что и требовалось.

Следствие. *Для доказательства теорем* 1, 2 *достаточно показать, что*

$$q(z) = z \cdot \exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$$

для любого простого p. (*Здесь* $\mathbb{Z}_p[[z]]$ *обозначает кольцо формальных степенных рядов относительно* z *с коэффициентами из* $\mathbb{Z}_p$.)

3. Предварительные сведения. Прежде всего, докажем вспомогательные утверждения из п. 1.

Доказательство леммы 2. Для заданных степенных рядов

$$q(z) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m, \quad a_1 = 1, \quad a_m \in \mathbb{Z},\ m = 1, 2, \ldots, \qquad z(q) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n$$

по условию выполнено тождество $q = q(z(q))$, откуда

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n + a_2\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n\right)^2 + a_3\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n q^n\right)^3 + \cdots. \tag{14}$$

Сравнивая первые коэффициенты при степенях q в (14), получаем $b_1 = 1$, $b_2 + a_2 = 0$, $b_3 + 2a_2 b_2 + a_3 = 0$, т.е. b_1, b_2, b_3 – целые числа. Дальнейшее доказательство проводим по индукции. Предположим теперь, что целочисленность $b_1, \ldots, b_{n-1}$ для $n \geqslant 3$ уже доказана, и рассмотрим коэффициент при q^n в (14). Он равен

$$b_n + \sum_{i=2}^{n-1} a_i M_i + a_n = 0, \tag{15}$$

где M_i – коэффициент при q^n многочлена $(b_1 q + b_2 q^2 + \cdots + b_{n-1} q^{n-1})^i$, $i = 2, \ldots, n-1$. Согласно индукционному предположению числа M_i являются целыми, так что соотношение (15) влечет целочисленность b_n. Лемма доказана.

Доказательство леммы 1. Пусть целое число q, $0 < q < N$, взаимно просто с N. Тогда в разложении на простые знаменатели чисел

$$N^m \cdot \frac{(q/N)_m}{m!} = \frac{q(q+N)(q+2N)\cdots(q+(m-1)N)}{m!}, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

содержат только простые делители числа N (см., например, [10, гл. I, приложение]). Числители чисел (16) взаимно просты с N, а степень вхождения простого $p \mid N$ в $m!$ равна

$$\operatorname{ord}_p m! = \left[\frac{m}{p}\right] + \left[\frac{m}{p^2}\right] + \left[\frac{m}{p^3}\right] + \cdots < \frac{m}{p-1} \tag{17}$$

(здесь $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа). Поэтому постоянная (2) действительно сокращает знаменатели чисел

$$\frac{(q_1/N)_m (q_2/N)_m \cdots (q_k/N)_m}{m!^k}.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Для элементов последовательности* (3) *справедливо следующее "факториальное" представление*:

$$A(m)=\frac{(a_1m)!\,(a_2m)!\cdots(a_\mu m)!}{(b_1m)!\,(b_2m)!\cdots(b_\eta m)!},\qquad m=0,1,2,\dots,\tag{18}$$

где

$$\{a_j\}_{j=1,\dots,\mu}=\left\{N,\frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}},\frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}p_{j_4}},\dots\right\}_{1\leqslant j_1<j_2<\dots\leqslant l},$$

$$\{b_i\}_{i=1,\dots,\eta}=\left\{1,\dots,1,\frac{N}{p_{j_1}},\frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}},\dots\right\}_{1\leqslant j_1<j_2<\dots\leqslant l}$$

– *целочисленные наборы*, *отвечающие данному* $N=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots p_l^{s_l}$, *и*, *кроме того*,

$$a_1+a_2+\dots+a_\mu=b_1+b_2+\dots+b_\eta.\tag{19}$$

Доказательство. Используя модификацию принципа формальной логики (см. [1, отд. 8, задачи 21–25]), для целого $n\geqslant 0$ получаем

$$\begin{aligned}
\prod_{\substack{1\leqslant q\leqslant N\\(q,N)=1}}\left(\frac{q}{N}+n\right)&=\prod_{1\leqslant q\leqslant N}\left(\frac{q}{N}+n\right)\cdot\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant l}\prod_{\substack{1\leqslant q\leqslant N\\p_j\,|\,q}}\left(\frac{q}{N}+n\right)\right)^{-1}\\
&\quad\times\left(\prod_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant l}\prod_{\substack{1\leqslant q\leqslant N\\p_{j_1}p_{j_2}|q}}\left(\frac{q}{N}+n\right)\right)\\
&\quad\times\left(\prod_{1\leqslant j_1<j_2<j_3\leqslant l}\prod_{\substack{1\leqslant q\leqslant N\\p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}|q}}\left(\frac{q}{N}+n\right)\right)^{-1}\cdots\\
&=\prod_{1\leqslant q\leqslant N}\left(\frac{q}{N}+n\right)\cdot\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant l}\prod_{1\leqslant q\leqslant N/p_j}\left(\frac{q}{N/p_j}+n\right)\right)^{-1}\\
&\quad\times\left(\prod_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant l}\prod_{1\leqslant q\leqslant N/(p_{j_1}p_{j_2})}\left(\frac{q}{N/(p_{j_1}p_{j_2})}+n\right)\right)\\
&\quad\times\left(\prod_{1\leqslant j_1<j_2<j_3\leqslant l}\prod_{1\leqslant q\leqslant N/(p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3})}\left(\frac{q}{N/(p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3})}+n\right)\right)^{-1}\cdots.
\end{aligned}$$

Домножим найденное выражение на

$$\begin{aligned}
N^{-N}\cdot\left(\prod_{1\leqslant j\leqslant l}\left(\frac{N}{p_j}\right)^{N/p_j}\right)^{-1}\cdot\left(\prod_{1\leqslant j_1<j_2\leqslant l}\left(\frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}}\right)^{N/(p_{j_1}p_{j_2})}\right)&\\
\times\left(\prod_{1\leqslant j_1<j_2<j_3\leqslant l}\left(\frac{N}{p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3}}\right)^{N/(p_{j_1}p_{j_2}p_{j_3})}\right)^{-1}\cdots&=C_N,
\end{aligned}$$

возьмем произведение по всем $n=0,1,\dots,m-1$ и разделим на $m!^k$. Тогда с учетом (3) получим требуемое тождество (18). Лемма доказана.

До конца этого пункта мы фиксируем произвольное простое число p.

Лемма Дворка [9, гл. VI, § 2, лемма 3], [11, гл. 14, § 2]. *Пусть* $F(z) \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$. *Тогда* $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ *в том и только том случае, когда*

$$\frac{F(z^p)}{F(z)^p} \in 1 + pz\mathbb{Z}_p[[z]].$$

Несмотря на то, что доказательство следующего утверждения содержится (с опечаткой) в [4], мы приводим его в данной работе для полноты изложения.

Лемма 5 [4, следствие 6.7]. *Пусть* $f(z) \in z\mathbb{Q}[[z]]$. *Тогда* $e^{f(z)} \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ *в том и только том случае, когда*

$$f(z^p) - pf(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]].$$

Доказательство. Положим $F(z) = e^{f(z)} \in 1 + z\mathbb{Q}[[z]]$.

Необходимость. Пусть $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Тогда согласно лемме Дворка

$$e^{f(z^p) - pf(z)} = \frac{F(z^p)}{F(z)^p} = 1 - pG(z)$$

для некоторого степенного ряда $G(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Следовательно,

$$f(z^p) - pf(z) = \log\bigl(1 - pG(z)\bigr) = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m G(z)^m}{m} \in pz\mathbb{Z}_p[[z]],$$

где мы воспользовались тем, что $p^m/m \in p\mathbb{Z}_p$ для всех целых $m \geqslant 1$.

Достаточность. Пусть теперь $f(z^p) - pf(z) = pH(z)$ для некоторого $H(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Поскольку для целого $m \geqslant 1$ степень вхождения простого p в $m!$ всегда *меньше* m (см. (17)), мы вправе заключить, что

$$\frac{F(z^p)}{F(z)^p} = e^{pH(z)} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{p^m}{m!} H(z)^m \in 1 + pz\mathbb{Z}_p[[z]].$$

Применение леммы Дворка дает требуемое включение $e^{f(z)} = F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть коэффициенты степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} A(m) z^m \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]], \qquad A(m) \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{20}$$

для любых целых неотрицательных u, v, n, s *таких, что* $0 \leqslant u < p^s$ *и* $0 \leqslant v < p$, *удовлетворяют условию*

$$\frac{A(v + up + np^{s+1})}{A(v + up)} - \frac{A(u + np^s)}{A(u)} \in p^{s+1}\mathbb{Z}_p. \tag{21}$$

Положим

$$f_\nu(z) = \sum_{m=\nu}^{\infty} A(m) z^m, \qquad \nu = 1, 2, \dots. \tag{22}$$

Тогда для любого целого положительного ν *справедливо сравнение*

$$\frac{f_\nu(z^p)}{f(z^p)} \equiv \frac{f_{\nu p}(z)}{f(z)} \pmod{\nu p\mathbb{Z}_p[[z]]}. \tag{23}$$

Доказательство. Выберем произвольное целое положительное ν и положим $s = \operatorname{ord}_p \nu$. Тогда $\nu = np^s$ для некоторого целого положительного n и $\nu p\mathbb{Z}_p[[z]] = p^{s+1}\mathbb{Z}_p[[z]]$.

Полагая в теореме 1.1 из [5]

$$A^{(r)}(m) = A(m), \quad g_r(m) = 1, \qquad r = 0,1,2,\dots, \quad m = 0,1,2,\dots,$$

согласно условию (21) получаем сравнение

$$f(z) \sum_{m=kp^s}^{(k+1)p^s-1} A(m)z^{mp} \equiv f(z^p) \sum_{m=kp^{s+1}}^{(k+1)p^{s+1}-1} A(m)z^m \pmod{p^{s+1}\mathbb{Z}_p[[z]]}, \tag{24}$$

справедливое при всех целых положительных k. Суммируя сравнения (24) по всем $k = n, n+1, n+2, \dots$, заключаем, что

$$f(z)f_\nu(z^p) \equiv f(z^p)f_{\nu p}(z) \pmod{p^{s+1}\mathbb{Z}_p[[z]]}. \tag{25}$$

Наконец, поскольку $f(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$, а значит и $f(z^p) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$, мы можем умножить обе части сравнения (25) на степенной ряд $\big(f(z)f(z^p)\big)^{-1} \in 1+z\mathbb{Z}_p[[z]]$, и это в точности отвечает требуемому сравнению (23). Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть коэффициенты степенного ряда* (20) *для любых целых неотрицательных* u, v, n, s *таких, что* $0 \leqslant u < p^s$ *и* $0 \leqslant v < p$, *удовлетворяют условию* (21), *а ряд* $g(z)$ *определяется разложением*

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A(m)D(1,m)z^m = \sum_{m=1}^{\infty} A(m)\biggl(\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\nu}\biggr)z^m. \tag{26}$$

Тогда $e^{g(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

Доказательство. Меняя суммирование в (26), приходим к разложению

$$g(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} f_\nu(z),$$

где ряды $f_\nu(z)$ определяются формулами (22). Следовательно,

$$\begin{aligned}
\frac{g(z^p)}{f(z^p)} - p\frac{g(z)}{f(z)} &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\frac{f_\nu(z^p)}{f(z^p)} - p\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\frac{f_\nu(z)}{f(z)} \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\biggl(\frac{f_\nu(z^p)}{f(z^p)} - \frac{f_{\nu p}(z)}{f(z)}\biggr) - p\sum_{\substack{\nu=1 \\ p\nmid\nu}}^{\infty} \frac{1}{\nu}\frac{f_\nu(z)}{f(z)} \in pz\mathbb{Z}_p[[z]],
\end{aligned} \tag{27}$$

где каждое слагаемое первой суммы в (27) лежит в $p\mathbb{Z}_p[[z]]$ по лемме 6, а каждое слагаемое второй – в $\mathbb{Z}_p[[z]]$, так как $f_\nu(z) \in z\mathbb{Z}_p[[z]]$, $f(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$ и $1/\nu \in \mathbb{Z}_p$ для любого целого ν, взаимно простого с p. Полученное включение (27) согласно лемме 5 означает, что $e^{g(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$. Предложение доказано.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства *p-адической гамма-функции*

$$\Gamma_p(n) = (-1)^n\gamma_p(n), \qquad \text{где} \quad \gamma_p(n) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,p)=1}}^{n-1} k. \tag{28}$$

Лемма 7. *Для любого целого $n \geqslant 0$ имеет место тождество*

$$\frac{(np)!}{n!} = p^n \gamma_p(1+np).$$

Доказательство. Из определения (28) получаем

$$\gamma_p(1+np) = \frac{(np)!}{p \cdot 2p \cdot 3p \cdots np} = \frac{(np)!}{n!\, p^n},$$

откуда следует требуемое тождество.

Лемма 8 [11, лемма 1.1]. *Для всех целых положительных k, n, s выполнено*

$$\Gamma_p(k+np^s) \equiv \Gamma_p(k) \pmod{p^s}.$$

Лемма 9. *Пусть последовательность целых $A(m) = A_N(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определяется формулой* (3). *Тогда для любого целого неотрицательного m*

$$\frac{A(mp)}{A(m)} = 1 + O(p)$$

и, в частности, $\operatorname{ord}_p A(mp) = \operatorname{ord}_p A(m)$.

Доказательство. Согласно леммам 7, 8 для любого целого положительного a получаем

$$\begin{aligned}\frac{(amp)!}{(am)!} &= p^{am}\gamma_p(1+amp) = p^{am}(-1)^{1+amp}\Gamma_p(1+amp)\\ &= p^{am}(-1)^{1+amp}\Gamma_p(1)\bigl(1+O(p)\bigr) = p^{am}(-1)^{amp}\bigl(1+O(p)\bigr),\end{aligned}$$

откуда, пользуясь леммой 4, находим требуемое:

$$\frac{A(mp)}{A(m)} = p^{(a_1+\dots+a_\mu-b_1-\dots-b_\eta)m}(-1)^{(a_1+\dots+a_\mu-b_1-\dots-b_\eta)mp}\bigl(1+O(p)\bigr) = 1+O(p).$$

Лемма доказана.

4. Доказательство теорем 1, 2. Для простого p определим на множестве

$$\mathscr{C}_p := \{\xi \in \mathbb{Q} : \xi > 0,\ \operatorname{ord}_p \xi \geqslant 0\}$$

отображение

$${}' \colon \mathscr{C}_p \to \mathscr{C}_p, \quad \xi \mapsto \xi', \tag{29}$$

по следующему правилу: число $p\xi' - \xi$ является минимальным представителем класса вычетов $-\xi \pmod p$ (иными словами, ξ' – минимальный элемент $\mathscr{C}_p$ такой, что $p\xi' - \xi \in \mathbb{Z}$).

Пусть $N \geqslant 2$ целое; числа $q_1, q_2, \dots, q_k$ образуют полный набор остатков при делении на N, взаимно простых с N.

ЛЕММА 10. *Если простое p не делит N, то отображение (29) является биекцией множества $\{q_j/N\}_{j=1,\dots,k}$ на себя.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через q'_j/N образ элемента q_j/N, $j=1,\dots,k$, при отображении (29). Согласно определению выполнено

$$pq'_j \equiv q_j \pmod N, \qquad j=1,\dots,k.$$

Поскольку p взаимно просто с N, существует p' такое, что $pp' \equiv 1 \pmod N$. Следовательно,

$$\{q'_j\}_{j=1,\dots,k} \equiv \{p'q_j\}_{j=1,\dots,k} \equiv \{q_j\}_{j=1,\dots,k} \pmod N,$$

откуда ввиду минимальности $q'_j>0$ получаем требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Пусть простое p не является делителем N в условиях теоремы 1 или делителем $N_1N_2\cdots N_r$ в условиях теоремы 2. Тогда для степенного ряда $q(z)$ из формулировки соответствующей теоремы справедливо включение $q(z)\in\mathbb{Z}_p[[z]]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество параметров $\{q_j/N\}_{j=1,\dots,k}$ обобщенного гипергеометрического ряда

$$\widehat{f}(z) := {}_kF_{k-1}\left(\begin{matrix} q_1/N, q_2/N, \dots, q_{k-1}/N, q_k/N \\ 1, \quad 1, \dots, \quad 1 \end{matrix} \,\middle|\, z\right) \tag{30}$$

инвариантно относительно преобразования (29) по лемме 10. Полагая

$$\widehat{g}(z) := \sum_{m=1}^{\infty} D_N(m) \frac{(q_1/N)_m (q_2/N)_m \cdots (q_k/N)_m}{m!^k} z^m, \tag{31}$$

согласно [5, теорема 4.1] получаем сравнение

$$\frac{\widehat{g}(z^p)}{\widehat{f}(z^p)} \equiv p\frac{\widehat{g}(z)}{\widehat{f}(z)} \pmod{p\mathbb{Z}_p[[z]]},$$

откуда, применяя лемму 5, заключаем, что $e^{\widehat{g}(z)/\widehat{f}(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$. Следовательно,

$$q(z) = z\cdot\exp\left(\frac{g(z)}{f(z)}\right) = z\cdot\exp\left(\frac{\widehat{g}(C_Nz)}{\widehat{f}(C_Nz)}\right) \in z\mathbb{Z}_p[[C_Nz]] = z\mathbb{Z}_p[[z]]$$

в теореме 1, где мы воспользовались взаимной простотой постоянной C_N из (2) и числа p.

Все рассуждения с необходимой модификацией степенных разложений (30), (31) и заменой C_N на $C_{N_1}C_{N_2}\cdots C_{N_r}$ остаются в силе и для ряда $q(z)$ в теореме 2. Тем самым, требуемое предложение доказано полностью.

Таким образом, нам остается доказать редуцированные версии теорем 1, 2 только для простых p, делящих N или $N_1N_2\cdots N_r$ соответственно.

Лемма 11. *Пусть p – простой делитель числа N, последовательность целых $A(m) = A_N(m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$, определяется формулой* (3). *Тогда для любых целых неотрицательных u, n, s, $0 \leqslant u < p^s$, выполнено*

$$\operatorname{ord}_p \frac{A(u + np^s)}{A(u)} \geqslant 0. \tag{32}$$

Доказательство. Поскольку $p \mid N$, для всех целых неотрицательных v, m, $0 \leqslant v < p$, согласно (3) имеем

$$\begin{aligned}\frac{A(v + mp)}{A(mp)} &= D_N^v \prod_{i=1}^{v} \frac{(q_1 + (i-1)N + mNp) \cdots (q_k + (i-1)N + mNp)}{i + mp} \\ &= D_N^v \frac{(q_1 \cdots q_k)^v}{v!} \bigl(1 + O(p)\bigr),\end{aligned}$$

где

$$D_N = N^{-k} \cdot C_N = \prod_{p \mid N} p^{k/(p-1)}. \tag{33}$$

Следовательно,

$$\operatorname{ord}_p \frac{A(v + mp)}{A(mp)} = \operatorname{ord}_p D_N^v = \frac{kv}{p-1}. \tag{34}$$

Воспользуемся для доказательства леммы методом математической индукции. При $s = 0$ имеем $u = 0$, так что оценка (32) принимает вид $\operatorname{ord}_p A(n) \geqslant 0$, а последнее неравенство следует из леммы 1.

Докажем теперь оценку (32) для $s \geqslant 1$, считая ее доказанной для меньших значений s. Представим число u в виде $u = v + u_1 p$, где $0 \leqslant v < p$ и $0 \leqslant u_1 < p^{s-1}$. Тогда, применяя (34) и лемму 9, получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_p \frac{A(u + np^s)}{A(u)} &= \operatorname{ord}_p A(v + u_1 p + np^s) - \operatorname{ord}_p A(v + u_1 p) \\ &= \left(\operatorname{ord}_p A(u_1 p + np^s) - \frac{kv}{p-1}\right) - \left(\operatorname{ord}_p A(u_1 p) - \frac{kv}{p-1}\right) \\ &= \operatorname{ord}_p A(u_1 + np^{s-1}) - \operatorname{ord}_p A(u_1) = \operatorname{ord}_p \frac{A(u_1 + np^{s-1})}{A(u_1)} \geqslant 0,\end{aligned}$$

где последнее неравенство следует из индукционного предположения. Тем самым, оценка (32) доказана для любых целых неотрицательных u, n, s, $0 \leqslant u < p^s$.

Лемма 12. *Пусть простое p делит N. Тогда элементы последовательности* (3) *для любых целых неотрицательных u, v, n, s таких, что $0 \leqslant u < p^s$ и $0 \leqslant v < p$, удовлетворяют условию* (21).

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{A(v+up+np^{s+1})}{A(up+np^{s+1})}\\
&\quad=\prod_{i=1}^{v}\frac{C_N(q_1/N+i-1+up+np^{s+1})\cdots(q_k/N+i-1+up+np^{s+1})}{i+up+np^{s+1}}\\
&\quad=D_N^v\prod_{i=1}^{v}\frac{(q_1+(i-1)N+uNp+nNp^{s+1})\cdots(q_k+(i-1)N+uNp+nNp^{s+1})}{i+up+np^{s+1}}\\
&\quad=D_N^v\prod_{i=1}^{v}\frac{(q_1+(i-1)N+uNp)\cdots(q_k+(i-1)N+uNp)}{i+up}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr)\\
&\quad=\frac{A(v+up)}{A(up)}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr),
\end{aligned}\tag{35}$$

где постоянная D_N определена в (33).

Теперь мы воспользуемся факториальным представлением (18) и свойствами p-адической гамма-функции. Согласно лемме 7 для любого целого положительного a выполнено

$$\frac{(aup)!}{(au)!}=p^{au}\gamma_p(1+aup)$$

и

$$\begin{aligned}
\frac{(a(up+np^{s+1}))!}{(a(u+np^s))!}&=p^{a(u+np^s)}\gamma_p(1+aup+anp^{s+1})\\
&=p^{a(u+np^s)}(-1)^{1+aup+anp^{s+1}}\Gamma_p(1+aup+anp^{s+1})\\
&=p^{au+anp^s}(-1)^{1+aup+anp^{s+1}}\Gamma_p(1+aup)\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr)\\
&=(-p)^{anp^s}\frac{(aup)!}{(au)!}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr),
\end{aligned}\tag{36}$$

где мы также применили лемму 8. Пользуясь теперь леммой 4 и соотношениями (36) для $a\in\{a_1,\dots,a_\mu,b_1,\dots,b_\eta\}$, находим

$$\begin{aligned}
\frac{A(up+np^{s+1})}{A(u+np^s)}&=\frac{A(up)}{A(u)}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr)\prod_{j=1}^{\mu}(-p)^{a_jnp^s}\prod_{i=1}^{\mu}(-p)^{-b_inp^s}\\
&=\frac{A(up)}{A(u)}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr)
\end{aligned}\tag{37}$$

согласно (19).

После перемножения соотношений (35) и (37) получаем

$$\frac{A(v+up+np^{s+1})}{A(u+np^s)}=\frac{A(v+up)}{A(u)}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr),$$

откуда

$$\frac{A(v+up+np^{s+1})}{A(v+up)}=\frac{A(u+np^s)}{A(u)}\bigl(1+O(p^{s+1})\bigr).\tag{38}$$

Согласно лемме 11 правая часть (38) лежит в $\mathbb{Z}_p$, откуда и следует включение (21). Лемма доказана.

Следствие. *Пусть простое p делит каждое из чисел $N_1, N_2, \dots, N_r$. Тогда элементы последовательности* (8) *для любых целых неотрицательных u, v, n, s таких, что $0 \leqslant u < p^s$ и $0 \leqslant v < p$, удовлетворяют условию* (21).

Доказательство. Соотношения (38) и (32) справедливы для любой из последовательностей $A(m) = A_{N_j}(m)$, $j = 1, \dots, r$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Отсюда мы получаем включение (21) для элементов последовательности (8).

Предложение 3. *Пусть простое p является делителем N в условиях теоремы* 1 *или делителем $N_1 N_2 \cdots N_r$ в условиях теоремы* 2. *Тогда для степенного ряда $q(z)$ из формулировки соответствующей теоремы справедливо включение $q(z) \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.*

Доказательство. Для простоты мы ограничимся доказательством предложения при выполнении условий теоремы 1. Схема рассуждений остается неизменной и в общем случае, когда простое p делит каждое N_j, $j = 1, \dots, r$.

Представим функцию (6) в виде суммы $g(z) = g_1(z) + g_2(z)$, где

$$g_1(z) = \sum_{m=1}^{\infty} A(m) \sum_{j=1}^{k} D\left(\frac{q_j}{N}, m\right) z^m, \qquad g_2(z) = -k \sum_{m=1}^{\infty} A(m) D(1, m) z^m,$$

и докажем, что $e^{g_i(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$, $i = 1, 2$.

Отметим, что

$$D\left(\frac{q_j}{N}, m\right) = N \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{q_j + (n-1)N} \in p\mathbb{Z}_p, \qquad j = 1, \dots, k, \quad m = 1, 2, \dots, \tag{39}$$

поскольку N делится на p, а знаменатель каждого слагаемого в (39) взаимно прост с N (и, значит, с p). Кроме того, все элементы последовательности (3) лежат в $\mathbb{Z}_p$, $f(z) \in 1 + z\mathbb{Z}_p[[z]]$. Следовательно, $g_1(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]]$ и $g_1(z)/f(z) \in pz\mathbb{Z}_p[[z]]$, так что для ряда $g_1(z)/f(z)$ условия леммы 5 выполнены. В силу леммы 5 мы получаем включение $e^{g_1(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

Согласно лемме 12 элементы последовательности (3) после домножения на целое число $-k$ удовлетворяют условию (21). Поэтому из предложения 1 следует включение $e^{g_2(z)/f(z)} \in \mathbb{Z}_p[[z]]$.

Окончательно,

$$q(z) = ze^{g(z)/f(z)} = ze^{g_1(z)/f(z)} \cdot ze^{g_2(z)/f(z)} \in z\mathbb{Z}_p[[z]],$$

что и требовалось.

Согласно следствию из леммы 3 применение предложений 2, 3 доказывает теоремы 1 и 2.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. II. 3-е изд. М.: Наука, 1978.

[2] Morrison D. R. Picard–Fuchs equations and mirror maps for hypersurfaces // Essays on Mirror Manifolds / ed. S.-T. Yau. Hong Kong: International Press, 1992. P. 241–264; ______ // Mirror Symmetry I / ed. S.-T. Yau. AMS/IP Stud. Adv. Math. V. 9. Providence, R.I.: Amer. Math. Soc., 1998. P. 185–199.

[3] Batyrev V. V., van Straten D. Generalized hypergeometric functions and rational curves on Calabi–Yau complete intersections in toric varieties // Comm. Math. Phys. 1995. V. 168. № 3. P. 493–533.

[4] Lian B. H., Yau S.-T. Mirror maps, modular relations and hypergeometric series I // E-print `http://arXiv.org/abs/hep-th/9507151`; Integrality of certain exponential series // Lectures in Algebra and Geometry / ed. M.-C. Kang. Proceedings of the International Conference on Algebra and Geometry, National Taiwan University (Taipei, Taiwan, December 26–30, 1995). Cambridge, MA: International Press, 1998. P. 215–227.

[5] Dwork B. On p-adic differential equations IV. Generalized hypergeometric functions as p-adic analytic functions in one variable // Ann. Sci. École Norm. Sup. (4). 1973. V. 6. № 3. P. 295–315.

[6] Katz N. M. Algebraic solutions of differential equations (p-curvature and the Hodge fibration) // Invent. Math. 1972. V. 18. № 1/2. P. 1–118.

[7] Morrison D. R. Mathematical aspects of mirror symmetry // Complex Algebraic Geometry / ed. J. Kollár. Lectures of a Summer Program (Park City, UT, 1993), IAS/Park City Math. Ser. V. 3. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. P. 267–340.

[8] Zudilin W. Number theory casting a look at the mirror // Preprint, 2000 (submitted for publication); E-print `http://arXiv.org/abs/math/0008237`.

[9] Коблиц Н. p-адические числа, p-адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982.

[10] André Y. G-Functions and Geometry. Aspects Math. (A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn). V. E13. Braunschweig: Vieweg, 1989.

[11] Lang S. Cyclotomic Fields. I, II (Combined 2nd edition). Graduate Texts in Math. V. 121. New York: Springer-Verlag, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило
31.10.2000