УДК 511.2+511.36

О числах, не являющихся нормальными ни по какому основанию

А. Н. Коробов

В работе доказано следующее утверждение. Пусть $a_1 = b_1 = 1$ и $b_k = \bigl(2 + [\sqrt{k}]\{k/[\sqrt{k}]\}\bigr)^{k!}$, $a_k = b_{k-1}(\delta_k + [b_k/b_{k-1}])$ при $k \geqslant 2$. Тогда при любом наборе величин $\delta_k \in \{2,3\}$ число $\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} a_k/b_k$ будет числом Лиувилля и не будет нормальным ни по какому натуральному основанию.

Библиография: 2 названия.

Число α называется *нормальным по натуральному основанию* q, если дробные доли $\{\alpha q^x\}$ равномерно распределены на $[0,1]$.

В работе [1] были построены примеры нормальных по основанию q чисел вида

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\lambda_\nu} q^{-\mu_\nu}, \quad (p,q) = 1, \quad p,q \geqslant 2,$$

где λ_ν, μ_ν — возрастающие последовательности натуральных чисел такие, что $\mu_\nu > p^{\theta\lambda_\nu}$, $\nu > \nu_0$, $\theta > 1/2$. На основе этой конструкции в работе [2] были построены примеры колец, все иррациональные элементы которых нормальны по основанию q и не являются нормальными по основанию $p \cdot q$.

В 1993г. на семинаре по теории чисел в МГУ И. Шиокава высказал предположение о том, что существуют иррациональные числа, которые не будут нормальными ни по какому натуральному основанию. До настоящего времени, по-видимому, не было известно примеров таких чисел и не было доказано их существование.

Теорема. *Пусть* $a_1 = b_1 = 1$ *и*

$$b_k = \left(2 + \bigl[\sqrt{k}\bigr]\left\{\frac{k}{[\sqrt{k}]}\right\}\right)^{k!}, \quad a_k = b_{k-1}\left(\delta_k + \left[\frac{b_k}{b_{k-1}}\right]\right) \qquad (1)$$

при $k \geqslant 2$. Тогда при любом наборе величин $\delta_k \in \{2,3\}$ число

$$\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

будет числом Лиувилля и не будет нормальным ни по какому натуральному основанию.

Доказательство. Из определения b_k следует, что при $k \geqslant 2$ выполнено

$$2^{k!} \leqslant b_k \leqslant \left(2+\sqrt{k}\right)^{k!}$$

и тогда при любом $n \geqslant 2$ и $k \geqslant k(n)$ имеем

$$b_{k+1} \geqslant \left(2^{k+1}\right)^{k!} \geqslant \left(\left(2+\sqrt{k}\right)^n\right)^{k!} \geqslant b_k^n. \tag{2}$$

Так как

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{b_{k-1}}{b_k}\left(\delta_k + \frac{b_k}{b_{k-1}} - \left\{\frac{b_k}{b_{k-1}}\right\}\right) = 1 + \theta_k \frac{b_{k-1}}{b_k}, \quad 1 < \theta_k \leqslant 3,$$

то при каждом натуральном N получим

$$\alpha = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} = \prod_{k=2}^{N} \frac{b_{k-1}}{b_k}\left(\delta_k + \left[\frac{b_k}{b_{k-1}}\right]\right) \prod_{k=N+1}^{\infty}\left(1+\theta_k \frac{b_{k-1}}{b_k}\right),$$

и в силу (2) при любом $n \geqslant 2$ выполнено

$$\alpha = \frac{A_N}{b_N}\left(1 + O\left(\frac{b_N}{b_{N+1}}\right)\right) = \frac{A_N}{b_N} + O\left(\frac{1}{b_N^{(n-1)}}\right),$$

где

$$A_N = \prod_{k=2}^{N}\left(\delta_k + \left[\frac{b_k}{b_{k-1}}\right]\right).$$

и постоянная в знаке O зависит только от n.

Заметим, что при любых целых $n \geqslant 3$ и $q \geqslant 2$, выбирая N равным m^2+q-2, при $m \geqslant q$ получим $b_N = q^{N!}$, откуда следует, что для некоторой бесконечной последовательности значений N

$$0 < \alpha - \frac{A_N}{q^{N!}} = O\left(\frac{1}{q^{(n-1)N!}}\right), \tag{3}$$

т.е. α — трансцендентное число Лиувилля. Отсюда также следует, что α не может быть нормальным числом ни по какому целому основанию $q \geqslant 2$, поскольку при $x = N!, N!+1, \ldots, 2N!$ дробные доли $\{\alpha q^x\}$ попадают на интервал малой длины. Теорема доказана.

Замечания. Из (3) легко вывести, что все элементы несчетного кольца, порожденного числами α при всевозможных наборах δ_k, не являются нормальными ни по какому натуральному основанию.

Также легко можно доказать следующие видоизменения теоремы:

а) Если в (1) заменить последовательность b_k на произвольную последовательность натуральных чисел такую, что $b_k > b_{k-1}^4$, то трансцендентное число α будет приближаться рациональными дробями A_N/b_N с погрешностью $O(1/b_N^3)$.

б) Если при этом отношение логарифмов чисел b_{k+1} и b_k ограничено и величины $\delta_k \in \{2, 3\}$ выбираются так, чтобы $(\delta_k + [b_k/b_{k-1}], b_k) \leqslant \sqrt{b_k}$, то α не будет числом Лиувилля.

в) Если кроме того последовательность b_k содержит сколь угодно высокие степени любых натуральных чисел (подобно последовательности (1)), то трансцендентное число α не будет нормальным ни по какому натуральному основанию и не будет числом Лиувилля.

Книжная палата

Поступило
01.05.95

Список литературы

[1] *Коробов А. Н.* О цепных дробях некоторых нормальных чисел // Деп. в ВИНИТИ 19.02.88. №1361–B88.

[2] *Kano H., Shiokawa I.* Rings of normal and nonnormal numbers. Preprint: Department of Math. Keyo University, 1991.