2003 г. январь — февраль *т. 58, вып. 1(349)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 511.3+512.573

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ КРАТНЫХ ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

В. В. Зудилин

Обзор посвящен многомерному обобщению дзета-функции Римана как функции натурального аргумента.

Библиография: 34 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 3
2. Кратные дзета-значения 4
3. Тождества: метод простейших дробей 5
4. Алгебра кратных дзета-значений 9
5. Шаффл-алгебра обобщенных полилогарифмов 11
6. Теорема о двойственности 13
7. Тождества: метод производящей функции 14
8. Квази-шаффл-произведения 16
9. Функциональная модель стаффл-алгебры 19
10. Гомоморфизм Хоффмана для стаффл-алгебры 21
11. Дифференцирования 22
12. Дифференцирования Ихары–Канеко и соотношения Оно 24
13. Открытые вопросы 27
14. q-аналоги кратных дзета-значений 28
Список литературы 31

1. Введение

В области $\operatorname{Re} s > 1$ *дзета-функция Римана* может быть задана сходящимся рядом

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\,. \tag{1}$$

Одной из интересных и все еще нерешенных задач остается вопрос о полиномиальных соотношениях над $\mathbb{Q}$ для чисел $\zeta(s)$, $s=2,3,4,\dots$. Благодаря Эйлеру известна формула

$$\zeta(s)=-\frac{(2\pi i)^s B_s}{2s!} \qquad \text{для} \quad s=2,4,6,\dots, \tag{2}$$

выражающая значения дзета-функции в четных точках в терминах числа

$$\pi = 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = 3.14159265358979323846\ldots$$

и чисел Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$, которые задаются производящей функцией

$$\frac{t}{e^t-1} = 1 - \frac{t}{2} + \sum_{s=2}^{\infty} B_s\frac{t^s}{s!}\,, \qquad B_s = 0 \text{ для нечетных } s \geqslant 3. \tag{3}$$

Соотношение (2) влечет совпадение колец $\mathbb{Q}[\zeta(2),\zeta(4),\zeta(6),\zeta(8),\dots]$ и $\mathbb{Q}[\pi^2]$, так что с учетом теоремы Линдеманна [17] о трансцендентности π можно заключить, что каждое из этих колец имеет степень трансцендентности 1 над полем рациональных чисел. Об арифметической природе значений дзета-функции в нечетных точках $s = 3, 5, 7, \dots$ известно совсем немного: Апери доказал [1] иррациональность числа $\zeta(3)$ и недавно Ривоаль установил [22] бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3)$, $\zeta(5), \zeta(7), \dots$. Предположительно, каждое из этих чисел является трансцендентным и общий ответ на поставленный выше вопрос о полиномиальных соотношениях над $\mathbb{Q}$ для значений ряда (1) при целых $s \geqslant 2$ выглядит очень просто.

Гипотеза 1. *Числа*

$$\pi,\ \zeta(3),\ \zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \dots$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

Эту гипотезу можно отнести к математическому фольклору (см., например, [7], [28]). В настоящем обзоре мы обсуждаем некоторое обобщение проблемы алгебраической независимости значений дзета-функции Римана в положительных целых точках (*дзета-значений*). Речь пойдет об объекте, который глубоко изучается в течение последнего десятилетия в связи с проблемами не только теории чисел, но и комбинаторики, алгебры, анализа, алгебраической геометрии, квантовой физики и многих других разделов математики. В то же время, работ в этом направлении на русском языке до сих пор не существует (отметим только готовящуюся к печати статью [25]). Этой публикацией мы надеемся привлечь внимание российских математиков к задачам, связанным с *кратными дзета-значениями*.

Автор искренне признателен рецензенту за ряд ценных замечаний, которые существенно улучшили изложение.

2. Кратные дзета-значения

Ряд (1) допускает следующее многомерное обобщение. При целых положительных $s_1, s_2, \dots, s_l$ с $s_1 > 1$ рассмотрим значения l-кратной дзета-функции

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) := \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}}; \tag{4}$$

соответствующий мультииндекс $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\dots,s_l)$ будем в дальнейшем называть *допустимым*. Величины (4) называются *кратными дзета-значениями* [30] (отсюда аббревиатура MZV – *multiple zeta value*), или *кратными гармоническими рядами* [10], или *эйлеровыми суммами*. Суммы (4) при $l=2$ восходят к Эйлеру [5], установившему семейство тождеств, связывающих двукратные дзета-значения с обычными (см. далее следствие из теоремы 1); в частности, Эйлер доказал тождество

$$\zeta(2,1)=\zeta(3), \tag{5}$$

которое постигла участь неоднократного переоткрытия. Числа (4) были введены Хоффманом в [10] и независимо Загиром в [30] (с другим порядком суммирования в правой части (4)); кроме того, в [10] и [30] были установлены некоторые $\mathbb{Q}$-линейные и $\mathbb{Q}$-полиномиальные тождества для кратных дзета-значений, а также сформулирован ряд гипотез (часть из которых была в дальнейшем доказана) о структуре алгебраических соотношений для семейства величин (4). Хоффман предложил [10] также альтернативное определение эйлеровых сумм

$$\tilde\zeta(\boldsymbol{s})=\tilde\zeta(s_1,s_2,\dots,s_l):=\sum_{n_1\geqslant n_2\geqslant\dots\geqslant n_l\geqslant1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}} \tag{6}$$

с нестрогими неравенствами при суммировании. Разумеется, все соотношения для рядов (6) могут быть без труда переписаны и для рядов (4) (см., например, [10], [25]), хотя некоторые тождества имеют компактную форму именно в терминах кратных дзета-значений (6) (см. соотношения (38) в разделе 7 далее).

Для каждого числа (4) определим две характеристики: *вес* (или *степень*) $|\boldsymbol{s}|:=s_1+s_2+\dots+s_l$ и *длину* (или *глубину*) $\ell(\boldsymbol{s}):=l$.

Отметим [31], что ряд в правой части (4) сходится абсолютно в области $\operatorname{Re}s_1>1$, $\sum_{k=1}^{l}\operatorname{Re}s_k>l$; более того, кратная дзета-функция $\zeta(\boldsymbol{s})$, задаваемая в этой области рядом (4), может быть аналитически продолжена до мероморфной функции на всем пространстве $\mathbb{C}^l$ с возможными простыми полюсами на гиперплоскостях $s_1=1$ и $\sum_{k=1}^{j}s_k=j+1-m$, где j, $1<j\leqslant l$, и $m\geqslant1$ – целые числа. Вопросы о существовании функционального уравнения при $l>1$ и локализации нетривиальных нулей (аналог гипотезы Римана) для функции $\zeta(\boldsymbol{s})$ остаются открытыми.

3. Тождества: метод простейших дробей

В этом разделе мы приведем примеры тождеств для кратных дзета-значений, которые доказываются элементарным аналитическим методом – *методом простейших дробей*.

Теорема 1 (соотношения Хоффмана [10; теорема 5.1]). *Для любого допустимого мультииндекса $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,\dots,s_l)$ справедливо тождество*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{l}&\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k+1,s_{k+1},\dots,s_l)\\&=\sum_{\substack{k=1\\s_k\geqslant2}}^{l}\sum_{j=0}^{s_k-2}\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k-j,j+1,s_{k+1},\dots,s_l).\end{aligned} \tag{7}$$

Доказательство. Для каждого $k=1,2,\dots,l$ имеем

$$\sum_{n_k>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_k^{s_k+1}n_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}}+\sum_{n_k>m>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_k^{s_k}mn_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}}$$
$$=\sum_{n_k\geqslant m>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_k^{s_k}mn_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}}$$
$$=\sum_{n_k>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k}\frac{1}{mn_k^{s_k}n_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}},$$

откуда

$$\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k+1,s_{k+1},\dots,s_l)+\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k,1,s_{k+1},\dots,s_l)$$
$$=\sum_{n_1>\dots>n_k>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k+1}n_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}}$$
$$+\sum_{n_1>\dots>n_k>m>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}mn_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}}$$
$$=\sum_{n_1>\dots>n_k>n_{k+1}>\dots>n_l\geqslant1}\sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k}\frac{1}{mn_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}n_{k+1}^{s_{k+1}}\cdots n_l^{s_l}}$$
$$=\sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}}\sum_{m=n_{k+1}+1}^{n_k}\frac{1}{m}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{l}\bigl(\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k+1,s_{k+1},\dots,s_l)+\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k,1,s_{k+1},\dots,s_l)\bigr)$$
$$=\sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant1}\frac{1}{n_1^{s_1}n_2^{s_2}\cdots n_l^{s_l}}\sum_{m=1}^{n_1}\frac{1}{m}$$
$$=\sum_{m_1,m_2,\dots,m_l\geqslant1}\frac{1}{m_1^{s_l}(m_1+m_2)^{s_{l-1}}\cdots(m_1+\dots+m_l)^{s_1}}\sum_{m=1}^{m_1+\dots+m_l}\frac{1}{m}$$
$$=\sum_{m_1,m_2,\dots,m_l\geqslant1}\frac{1}{M_1^{s_l}M_2^{s_{l-1}}\cdots M_l^{s_1}}\sum_{m_{l+1}\geqslant1}\left(\frac{1}{m_{l+1}}-\frac{1}{M_{l+1}}\right),\tag{8}$$

где мы ввели обозначение $M_k=m_1+m_2+\dots+m_k$ для $k=1,\dots,l+1$ (при этом, как несложно заметить, $M_k=n_{l+1-k}$ для $k=1,\dots,l$). Отметим теперь следующее разложение в сумму простейших дробей (относительно параметра u):

$$\frac{1}{u(u+v)^s}=\frac{1}{v^su}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{1}{v^{j+1}(u+v)^{s-j}},\qquad u,v\in\mathbb{R};\tag{9}$$

для доказательства достаточно воспользоваться тем, что в правой части суммируется геометрическая прогрессия. Полагая $u = m_{l+1}$, $v = M_l$ и $s = s_1$ в (9), получаем

$$\frac{1}{m_{l+1}M_{l+1}^{s_1}} = \frac{1}{m_{l+1}(m_{l+1}+M_l)^{s_1}} = \frac{1}{M_l^{s_1}m_{l+1}} - \sum_{j=0}^{s_1-1}\frac{1}{M_l^{j+1}M_{l+1}^{s_1-j}},$$

откуда

$$\frac{1}{M_l^{s_1}}\left(\frac{1}{m_{l+1}} - \frac{1}{M_{l+1}}\right) = \sum_{j=0}^{s_1-2}\frac{1}{M_l^{j+1}M_{l+1}^{s_1-j}} + \frac{1}{m_{l+1}M_{l+1}^{s_1}}.$$

Продолжая равенство (8), находим

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l}\bigl(\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k+1,s_{k+1},\dots,s_l) + \zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k,1,s_{k+1},\dots,s_l)\bigr) \\
&\quad= \sum_{j=0}^{s_1-2}\sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}M_2^{s_{l-1}}\cdots M_{l-1}^{s_2}M_l^{j+1}M_{l+1}^{s_1-j}} \\
&\qquad+ \sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}M_2^{s_{l-1}}\cdots M_{l-1}^{s_2}m_{l+1}M_{l+1}^{s_1}} \\
&\quad= \sum_{j=0}^{s_1-2}\zeta(s_1-j,j+1,s_2,\dots,s_l) + \sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}M_2^{s_{l-1}}\cdots M_{l-1}^{s_2}m_lM_{l+1}^{s_1}}
\end{aligned} \tag{10}$$

(в последней кратной сумме мы поменяли местами индексы m_l и m_{l+1}). Используя теперь тождество (9) для $u = m_{k+1}$, $v = M_k = M_{k+1} - m_{k+1}$ и $s = s_{l+1-k}$, заключаем, что

$$\frac{1}{M_k^{s_{l+1-k}}m_{k+1}} = \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1}\frac{1}{M_k^{j+1}M_{k+1}^{s_{l+1-k}-j}} + \frac{1}{m_{k+1}M_{k+1}^{s_{l+1-k}}}, \qquad k = 1,2,\dots,l-1,$$

откуда

$$\begin{aligned}
&\sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}\cdots M_k^{s_{l+1-k}}m_{k+1}M_{k+2}^{s_{l-k}}\cdots M_{l+1}^{s_1}} \\
&\quad= \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1}\sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}\cdots M_{k-1}^{s_{l+2-k}}M_k^{j+1}M_{k+1}^{s_{l+1-k}-j}M_{k+2}^{s_{l-k}}\cdots M_{l+1}^{s_1}} \\
&\qquad+ \sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}\cdots M_{k-1}^{s_{l+2-k}}m_{k+1}M_{k+1}^{s_{l+1-k}}\cdots M_{l+1}^{s_1}} \\
&\quad= \sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1}\zeta(s_1,\dots,s_{l-k},s_{l+1-k}-j,j+1,s_{l+2-k},\dots,s_l) \\
&\qquad+ \sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{M_1^{s_l}\cdots M_{k-1}^{s_{l+2-k}}m_kM_{k+1}^{s_{l+1-k}}\cdots M_{l+1}^{s_1}},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$k = 1,2,\dots,l-1.$$

Последовательно применяя тождества (11) для кратной суммы в правой части равенства (10) в обратном порядке (т.е. начиная с $k = l-1$ и заканчивая $k = 1$), получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l}\bigl(\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k+1,s_{k+1},\dots,s_l)+\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k,1,s_{k+1},\dots,s_l)\bigr)\\
&\quad=\sum_{j=0}^{s_1-2}\zeta(s_1-j,j+1,s_2,\dots,s_l)\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=0}^{s_{l+1-k}-1}\zeta(s_1,\dots,s_{l-k},s_{l+1-k}-j,j+1,s_{l+2-k},\dots,s_l)\\
&\qquad+\sum_{m_1,m_2,\dots,m_{l+1}\geqslant 1}\frac{1}{m_1M_2^{s_l}M_3^{s_{l-1}}\cdots M_{l+1}^{s_1}}\\
&\quad=\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=0}^{s_k-2}\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k-j,j+1,s_{k+1},\dots,s_l)\\
&\qquad+\sum_{k=1}^{l}\zeta(s_1,\dots,s_{k-1},s_k,1,s_{k+1},\dots,s_l). \qquad (12)
\end{aligned}$$

Произведя необходимые сокращения в левой и правой частях равенства (12), приходим в результате к требуемому тождеству (7).

При $l = 1$ утверждение теоремы 1 может быть записано в следующем виде.

Следствие (теорема Эйлера). *Для любого целого $s \geqslant 3$ справедливо тождество*

$$\zeta(s)=\sum_{j=1}^{s-2}\zeta(s-j,j). \qquad (13)$$

Отметим также, что в случае $s = 3$ тождество (13) есть не что иное, как соотношение (5).

С помощью метода простейших дробей в работе [13] доказано также следующее утверждение.

Теорема 2 (теорема о циклической сумме). *Для любого допустимого мультииндекса $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, \dots, s_l)$ справедливо тождество*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{l}\zeta(s_k+1,s_{k+1},\dots,s_l,s_1,\dots,s_{k-1})\\
&\qquad=\sum_{\substack{k=1\\ s_k\geqslant 2}}^{l}\sum_{j=0}^{s_k-2}\zeta(s_k-j,s_{k+1},\dots,s_l,s_1,\dots,s_{k-1},j+1).
\end{aligned}$$

Из теоремы 2 непосредственно вытекает результат о том, что сумма всех кратных дзета-значений фиксированной длины и фиксированного веса не зависит от длины; это утверждение так же, как и теорема 1, обобщает приведенную выше теорему Эйлера.

Теорема 3 (теорема о полной сумме). *Для любых целых $s > 1$ и $l \geqslant 1$ справедливо тождество*

$$\sum_{\substack{s_1>1, s_2\geqslant 1, \dots, s_l\geqslant 1 \\ s_1+s_2+\dots+s_l=s}} \zeta(s_1, s_2, \dots, s_l) = \zeta(s).$$

Теоремы 1 и 3 являются частным случаем соотношений Оно [21], о которых мы говорим далее в разделе 12.

4. Алгебра кратных дзета-значений

Этот раздел основан на работах [11] и [30]. Для описания известных алгебраических соотношений (т.е. числовых тождеств) над $\mathbb{Q}$ для чисел (4) оказывается удобным представлять ζ как линейное отображение некоторой полиномиальной алгебры на поле действительных чисел. Рассмотрим кодирование мультииндексов $\boldsymbol{s}$ словами (мономами от некоммутативных переменных) над алфавитом $X = \{x_0, x_1\}$ по правилу

$$\boldsymbol{s} \mapsto x_{\boldsymbol{s}} = x_0^{s_1-1}x_1x_0^{s_2-1}x_1\cdots x_0^{s_l-1}x_1.$$

Положим

$$\zeta(x_{\boldsymbol{s}}) := \zeta(\boldsymbol{s}) \tag{14}$$

для всех допустимых (начинающихся с x_0 и кончающихся на x_1) слов; тогда вес (или степень) $|x_{\boldsymbol{s}}| := |\boldsymbol{s}|$ совпадают со степенью монома $x_{\boldsymbol{s}}$ по совокупности переменных, а длина $\ell(x_{\boldsymbol{s}}) := \ell(\boldsymbol{s})$ является степенью по переменной x_1.

Пусть $\mathbb{Q}\langle X\rangle = \mathbb{Q}\langle x_0, x_1\rangle$ – градуированная по степени $\mathbb{Q}$-алгебра (где мы считаем степень каждой переменной x_0 и x_1 равной 1) многочленов от двух некоммутирующих переменных; мы отождествляем алгебру $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ с градуированным $\mathbb{Q}$-векторным пространством $\mathfrak{H}$, натянутым на мономы от переменных x_0, x_1. Определим также градуированные $\mathbb{Q}$-векторные пространства $\mathfrak{H}^1 = \mathbb{Q}\mathbf{1} \oplus \mathfrak{H}x_1$ и $\mathfrak{H}^0 = \mathbb{Q}\mathbf{1} \oplus x_0\mathfrak{H}x_1$, где $\mathbf{1}$ – единица (пустое слово веса 0 и длины 0) алгебры $\mathbb{Q}\langle X\rangle$. Тогда $\mathfrak{H}^1$ можно отождествлять с подалгеброй алгебры $\mathbb{Q}\langle X\rangle$, порожденной образующими $y_s = x_0^{s-1}x_1$, в то время как $\mathfrak{H}^0$ является $\mathbb{Q}$-векторным пространством, натянутым на допустимые слова. Теперь мы можем представлять функцию ζ как $\mathbb{Q}$-линейное отображение $\zeta\colon \mathfrak{H}^0 \to \mathbb{R}$, определенное соотношениями $\zeta(\mathbf{1}) = 1$ и (14).

Определим умножения $\sqcup\!\sqcup$ (*тасование* или *шаффл-произведение*) на $\mathfrak{H}$ и $*$ (*гармоническое* или *стаффл-произведение*) на $\mathfrak{H}^1$ правилами

$$\mathbf{1} \sqcup\!\sqcup w = w \sqcup\!\sqcup \mathbf{1} = w, \qquad \mathbf{1} * w = w * \mathbf{1} = w \tag{15}$$

для всякого слова w и

$$x_j u \sqcup\!\sqcup x_k v = x_j(u \sqcup\!\sqcup x_k v) + x_k(x_j u \sqcup\!\sqcup v), \tag{16}$$

$$y_j u * y_k v = y_j(u * y_k v) + y_k(y_j u * v) + y_{j+k}(u * v) \tag{17}$$

для любых слов u, v, любых букв x_j, x_k и любых образующих y_j, y_k подалгебры $\mathfrak{H}^1$ соответственно, распространяя правила (15)–(17) на всю алгебру $\mathfrak{H}$ и всю подалгебру $\mathfrak{H}^1$ по линейности. Иногда оказывается полезным рассматривать стаффл-произведение на всей алгебре $\mathfrak{H}$, формально добавляя к (17) правило

$$x_0^j * w = w * x_0^j = wx_0^j \tag{18}$$

для всякого слова w и целого $j \geqslant 1$. Отметим, что индуктивные аргументы позволяют доказать коммутативность и ассоциативность каждого из умножений (см. по этому поводу раздел 8 далее); получающиеся алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup} := (\mathfrak{H}, \sqcup\!\sqcup)$, $\mathfrak{H}^1_* := (\mathfrak{H}^1, *)$ (а также $\mathfrak{H}_* := (\mathfrak{H}, *)$) являются примерами так называемых *алгебр Хопфа*.

Следующие два утверждения мотивируют рассмотрение введенных умножений $\sqcup\!\sqcup$ и $*$; их доказательства можно найти в [11], [13], [28].

Теорема 4. *Отображение ζ является гомоморфизмом шаффл-алгебры $\mathfrak{H}^0_{\sqcup\!\sqcup} := (\mathfrak{H}^0, \sqcup\!\sqcup)$ на $\mathbb{R}$, т.е.*

$$\zeta(w_1 \sqcup\!\sqcup w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2) \quad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0. \tag{19}$$

Теорема 5. *Отображение ζ является гомоморфизмом стаффл-алгебры $\mathfrak{H}^0_* := (\mathfrak{H}^0, *)$ на $\mathbb{R}$, т.е.*

$$\zeta(w_1 * w_2) = \zeta(w_1)\zeta(w_2) \quad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^0. \tag{20}$$

В дальнейшем мы приводим подробные доказательства этих двух теорем, использующие дифференциально-разностное происхождение умножений $\sqcup\!\sqcup$ и $*$ в подходящих функциональных моделях алгебр $\mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}$ и $\mathfrak{H}^0_*$. Доказывая теорему 4 (см. раздел 5), мы следуем схеме работы [27], в то время как наше доказательство теоремы 5 (см. раздел 9) является новым.

Еще один тип тождеств дается следующим утверждением, вывод которого из теоремы 1 приводится в разделе 11.

Теорема 6. *Отображение ζ удовлетворяет соотношениям*

$$\zeta(x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1 * w) = 0 \quad \textit{для} \quad \textit{всех} \quad w \in \mathfrak{H}^0 \tag{21}$$

(в частности, многочлены $x_1 \sqcup\!\sqcup w - x_1 * w$ лежат в $\mathfrak{H}^0$).

Все известные (доказанные и экспериментально полученные) к настоящему моменту тождества для кратных дзета-значений следуют из тождеств (19)–(21). Поэтому следующая гипотеза выглядит вполне правдоподобно.

Гипотеза 2 [11], [18], [27]. *Все алгебраические соотношения над $\mathbb{Q}$ между кратными дзета-значениями порождаются тождествами* (19)–(21); *иными словами,*

$$\ker\zeta = \{u \sqcup\!\sqcup v - u * v : u \in \mathfrak{H}^1,\ v \in \mathfrak{H}^0\}.$$

5. Шаффл-алгебра обобщенных полилогарифмов

Чтобы доказать шаффл-соотношения (19) для кратных дзета-значений, определим *обобщенные полилогарифмы*

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{s}}(z) := \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}}, \qquad |z|<1, \tag{22}$$

для любого набора целых положительных $s_1, s_2, \dots, s_l$. Из определения получаем

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{s}}(1) = \zeta(\boldsymbol{s}), \qquad \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^l, \quad s_1 \geqslant 2,\ s_2 \geqslant 1,\ \dots,\ s_l \geqslant 1. \tag{23}$$

Полагая, как и в случае кратных дзета-значений,

$$\mathrm{Li}_{x_{\boldsymbol{s}}}(z) := \mathrm{Li}_{\boldsymbol{s}}(z), \qquad \mathrm{Li}_{\mathbf{1}}(z) := 1, \tag{24}$$

расширим действие отображения $\mathrm{Li}\colon w \mapsto \mathrm{Li}_w(z)$ по линейности на градуированную алгебру $\mathfrak{H}^1$ (не $\mathfrak{H}$, поскольку мультииндексы кодируются словами из $\mathfrak{H}^1$).

Лемма 1. *Пусть $w \in \mathfrak{H}^1$ – произвольное непустое слово и x_j – первая буква в его записи (иными словами, $w = x_j u$ для некоторого слова $u \in \mathfrak{H}^1$). Тогда*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Li}_w(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Li}_{x_j u}(z) = \omega_j(z)\, \mathrm{Li}_u(z), \tag{25}$$

где

$$\omega_j(z) = \omega_{x_j}(z) := \begin{cases} \dfrac{1}{z}, & \text{если } x_j = x_0, \\[2mm] \dfrac{1}{1-z}, & \text{если } x_j = x_1. \end{cases} \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $w = x_j u = x_{\boldsymbol{s}}$ для некоторого мультииндекса $\boldsymbol{s}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Li}_w(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Li}_{\boldsymbol{s}}(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}}, \\ &= \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z^{n_1-1}}{n_1^{s_1-1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}}. \end{aligned}$$

Поэтому в случае $s_1 > 1$ (отвечающем букве $x_j = x_0$) мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Li}_{x_0 u}(z) &= \frac{1}{z} \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1-1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}} \\ &= \frac{1}{z} \mathrm{Li}_{s_1-1, s_2, \dots, s_l}(z) = \frac{1}{z} \mathrm{Li}_u(z), \end{aligned}$$

а в случае $s_1 = 1$ (отвечающем букве $x_j = x_1$) –

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \mathrm{Li}_{x_1 u}(z) &= \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z^{n_1-1}}{n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}} = \sum_{n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{1}{n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}} \sum_{n_1=n_2+1}^{\infty} z^{n_1-1} \\ &= \frac{1}{1-z} \sum_{n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z^{n_2}}{n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}} = \frac{1}{1-z} \mathrm{Li}_{s_2, \dots, s_l}(z) = \frac{1}{1-z} \mathrm{Li}_u(z), \end{aligned}$$

что завершает доказательство.

Лемма 1 мотивирует иное определение обобщенных полилогарифмов, теперь уже для всех элементов алгебры $\mathfrak{H}$. Как и раньше, его достаточно предъявить только для слов $w \in \mathfrak{H}$, распространяя затем по линейности на всю алгебру; положим $\mathrm{Li}_{\mathbf{1}}(z) = 1$ и

$$\mathrm{Li}_w(z) = \begin{cases} \dfrac{\log^s z}{s!}, & \text{если } w = x_0^s \text{ для некоторого } s \geqslant 1, \\ \displaystyle\int_0^z \omega_j(z)\,\mathrm{Li}_u(z)\,\mathrm{d}z, & \text{если } w = x_j u \text{ содержит букву } x_1. \end{cases} \tag{27}$$

Тогда лемма 1 остается справедливой и для расширенной версии (27) полилогарифмов (откуда следует совпадение вновь определенных полилогарифмов со “старыми” (24) для слов $w \in \mathfrak{H}^1$); более того,

$$\lim_{z\to 0+0} \mathrm{Li}_w(z) = 0, \qquad \text{если слово } w \text{ содержит букву } x_1.$$

Несложная проверка показывает, что обобщенные полилогарифмы являются непрерывными вещественнозначными функциями на интервале $(0,1)$.

Лемма 2. *Отображение $w \mapsto \mathrm{Li}_w(z)$ является гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{H}_{ш}$ на $C((0,1);\mathbb{R})$.*

Доказательство. Мы должны проверить равенства

$$\mathrm{Li}_{w_1 ш\, w_2}(z) = \mathrm{Li}_{w_1}(z)\,\mathrm{Li}_{w_2}(z) \quad \text{для всех} \quad w_1, w_2 \in \mathfrak{H}. \tag{28}$$

Достаточно проделать эту работу для *слов* $w_1, w_2 \in \mathfrak{H}$. Будем доказывать равенство (28) индукцией по величине $|w_1| + |w_2|$. Если $w_1 = \mathbf{1}$ или $w_2 = \mathbf{1}$, соотношение (28) превращается в тавтологию согласно (15). В противном случае $w_1 = x_j u$ и $w_2 = x_k v$, так что согласно лемме 1 и индукционному предположению имеем

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(\mathrm{Li}_{w_1}(z)\,\mathrm{Li}_{w_2}(z)\big) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(\mathrm{Li}_{x_j u}(z)\,\mathrm{Li}_{x_k v}(z)\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Li}_{x_j u}(z)\cdot \mathrm{Li}_{x_k v}(z) + \mathrm{Li}_{x_j u}(z)\cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Li}_{x_k v}(z) \\ &= \omega_j(z)\,\mathrm{Li}_u(z)\,\mathrm{Li}_{x_k v}(z) + \omega_k(z)\,\mathrm{Li}_{x_j u}(z)\,\mathrm{Li}_v(z) \\ &= \omega_j(z)\,\mathrm{Li}_{u\, ш\, x_k v}(z) + \omega_k(z)\,\mathrm{Li}_{x_j u\, ш\, v}(z) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(\mathrm{Li}_{x_j(u\, ш\, x_k v)}(z) + \mathrm{Li}_{x_k(x_j u\, ш\, v)}(z)\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Li}_{x_j u\, ш\, x_k v}(z) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathrm{Li}_{w_1 ш\, w_2}(z). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathrm{Li}_{w_1}(z)\,\mathrm{Li}_{w_2}(z) = \mathrm{Li}_{w_1 ш\, w_2}(z) + C, \tag{29}$$

и предельный переход $z \to 0+0$, если хотя бы одно из слов w_1, w_2 содержит букву x_1, или подстановка $z = 1$, если в записи слов w_1, w_2 участвует только буква x_0, приводит к соотношению $C = 0$. Таким образом, равенство (29) превращается в требуемое (28). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4. Теорема 4 следует из леммы 2 и соотношений (23).

Явное вычисление группы монодромии для системы дифференциальных уравнений (25) позволило Мину, Петито и ван дер Ховену [19], [20] доказать, что гомоморфизм $w \mapsto \mathrm{Li}_w(z)$ шаффл-алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}$ над $\mathbb{C}$ является биективным, т.е. все $\mathbb{C}$-алгебраические соотношения для обобщенных полилогарифмов индуцируются только шаффл-соотношениями (28) и, в частности, обобщенные полилогарифмы линейно независимы над $\mathbb{C}$. Наиболее простое доказательство линейной независимости функций (22), как следствие элегантных тождеств для этих функций, принадлежит Уланскому [25]; это же утверждение следует из результата Сорокина [24].

6. Теорема о двойственности

Согласно лемме 1 для слова $w = x_{\varepsilon_1}x_{\varepsilon_2}\cdots x_{\varepsilon_k} \in \mathfrak{H}^1$ справедливо интегральное представление

$$\begin{aligned}\mathrm{Li}_w(z) &= \int_0^z \omega_{\varepsilon_1}(z_1)\,\mathrm{d}z_1 \int_0^{z_1} \omega_{\varepsilon_2}(z_2)\,\mathrm{d}z_2 \cdots \int_0^{z_{k-1}} \omega_{\varepsilon_k}(z_k)\,\mathrm{d}z_k \\ &= \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{z>z_1>z_2>\cdots>z_{k-1}>z_k>0} \omega_{\varepsilon_1}(z_1)\omega_{\varepsilon_2}(z_2)\cdots\omega_{\varepsilon_k}(z_k)\,\mathrm{d}z_1\,\mathrm{d}z_2\cdots\mathrm{d}z_k \end{aligned} \tag{30}$$

в области $0 < z < 1$. В случае $x_{\varepsilon_1} \ne x_1$, т.е. $w \in \mathfrak{H}^0$, интеграл в (30) сходится в области $0 < z \leqslant 1$, так что в соответствии с (23) мы получаем представление [30] кратных дзета-значений

$$\zeta(w) = \int\!\!\cdots\!\!\int\limits_{1>z_1>\cdots>z_k>0} \omega_{\varepsilon_1}(z_1)\cdots\omega_{\varepsilon_k}(z_k)\,\mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_k \tag{31}$$

в виде *итерированных интегралов Чена*. Следующий результат является простым приложением интегрального представления (31).

Обозначим через τ анти-автоморфизм алгебры $\mathfrak{H} = \mathbb{Q}\langle x_0, x_1\rangle$, меняющий местами x_0 и x_1; например, $\tau(x_0^2x_1x_0x_1) = x_0x_1x_0x_1^2$. Очевидно, τ является инволюцией, сохраняющей вес. Как несложно заметить, τ также является автоморфизмом подалгебры $\mathfrak{H}^0$.

Теорема 7 (теорема о двойственности [30]). *Для любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ выполнено*

$$\zeta(w) = \zeta(\tau w).$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно сделать замену переменных $z_1' = 1-z_k, z_2' = 1-z_{k-1}, \dots, z_k' = 1-z_1$ и воспользоваться соотношениями $\omega_0(z) = \omega_1(1-z)$, вытекающими из (26).

В качестве самого простого следствия из теоремы 7 отметим (опять) тождество (5), получающееся для слова $w = x_0^2x_1$, а также более общее тождество

$$\zeta(n+2) = \zeta(2, \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ раз}}), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{32}$$

для слов $w = x_0^{n+1}x_1$.

7. Тождества: метод производящей функции

Другим приложением доказанных в лемме 1 дифференциальных уравнений для обобщенных полилогарифмов является *метод производящей функции.*

Отметим, что для фиксированного допустимого мультииндекса $\boldsymbol{s} = (s_1, \dots, s_l)$ соответствующее множество *периодических* полилогарифмов

$$\mathrm{Li}_{\{\boldsymbol{s}\}_n}(z), \quad \text{где } \{\boldsymbol{s}\}_n = (\underbrace{\boldsymbol{s}, \boldsymbol{s}, \dots, \boldsymbol{s}}_{n \text{ раз}}), \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

(см., например, [4], [28]), обладает производящей функцией

$$L_{\boldsymbol{s}}(z, t) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{Li}_{\{\boldsymbol{s}\}_n}(z) t^{n|\boldsymbol{s}|},$$

удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению относительно переменной z. Так, например, в случае $\ell(\boldsymbol{s}) = 1$, т.е. $\boldsymbol{s} = (s)$, согласно лемме 1 соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$\biggl(\biggl((1-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\biggr)\biggl(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\biggr)^{s-1} - t^s\biggr) L_{\boldsymbol{s}}(z, t) = 0,$$

и его решение может быть явно указано в терминах обобщенного гипергеометрического ряда (см. [3], [4], [28]).

Лемма 3 [4; теорема 12]. *Имеет место равенство*

$$L_{(3,1)}(z, t) = F\bigl(\tfrac{1}{2}(1+i)t, -\tfrac{1}{2}(1+i)t; 1; z\bigr) \cdot F\bigl(\tfrac{1}{2}(1-i)t, -\tfrac{1}{2}(1-i)t; 1; z\bigr), \qquad (33)$$

где $F(a, b; c; z)$ – гауссова гипергеометрическая функция.

Доказательство. Несложная проверка (с помощью леммы 1 для левой части) показывает, что обе части аннигилируют под действием дифференциального оператора

$$\biggl((1-z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\biggr)^2 \biggl(z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\biggr)^2 - t^4;$$

кроме того, первые члены в разложении по степеням z обеих частей (33) совпадают:

$$1 + \frac{t^4}{8}z^2 + \frac{t^4}{18}x^3 + \frac{t^8 + 44t^4}{1536}x^4 + \cdots.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 8 [4], [28]. *Для любого целого $n \geqslant 1$ имеет место тождество*

$$\zeta(\{3, 1\}_n) = \frac{2\pi^{4n}}{(4n+2)!}. \qquad (34)$$

Доказательство. Согласно формуле суммирования Гаусса [29; гл. 14]

$$F(a,-a;1;1)=\frac{1}{\Gamma(1-a)\Gamma(1+a)}=\frac{\sin\pi a}{\pi a} \tag{35}$$

после подстановки $z=1$ в равенство (33) получаем

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(\{3,1\}_n)t^{4n}&=L_{(3,1)}(1,t)=\frac{\sin\frac12(1+i)\pi t}{\frac12(1+i)\pi t}\cdot\frac{\sin\frac12(1-i)\pi t}{\frac12(1-i)\pi t}\\&=\frac{1}{2\pi^2t^2}\cdot\bigl(e^{(1+i)\pi t/2}-e^{-(1+i)\pi t/2}\bigr)\bigl(e^{(1-i)\pi t/2}-e^{-(1-i)\pi t/2}\bigr)\\&=\frac{1}{2\pi^2t^2}\cdot\bigl(e^{\pi t}+e^{-\pi t}-e^{i\pi t}-e^{-i\pi t}\bigr)\\&=\frac{1}{2\pi^2t^2}\sum_{m=0}^{\infty}\bigl(1+(-1)^m-i^m-(-i)^m\bigr)\frac{(\pi t)^m}{m!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2\pi^{4n}t^{4n}}{(4n+2)!}.\end{aligned}$$

Сравнение коэффициентов при одинаковых степенях приводит к требуемому тождеству.

Утверждение теоремы 8 было сформулировано в [30] в качестве гипотезы. Это тождество – не единственный пример приложения метода производящей функции. Приведем еще несколько тождеств из [3], подобных (34), для которых указанный метод также оказывается эффективным:

$$\begin{gathered}\zeta(\{2\}_n)=\frac{2(2\pi)^{2n}}{(2n+1)!}\Bigl(\frac12\Bigr)^{2n+1},\quad \zeta(\{4\}_n)=\frac{4(2\pi)^{4n}}{(4n+2)!}\Bigl(\frac12\Bigr)^{2n+1},\\ \zeta(\{6\}_n)=\frac{6(2\pi)^{6n}}{(6n+3)!},\quad \zeta(\{8\}_n)=\frac{8(2\pi)^{8n}}{(8n+4)!}\biggl(\Bigl(1+\frac{1}{\sqrt2}\Bigr)^{4n+2}+\Bigl(1-\frac{1}{\sqrt2}\Bigr)^{4n+2}\biggr),\\ \zeta(\{10\}_n)=\frac{10(2\pi)^{10n}}{(10n+5)!}\biggl(1+\Bigl(\frac{1+\sqrt5}{2}\Bigr)^{10n+5}+\Bigl(\frac{1-\sqrt5}{2}\Bigr)^{10n+5}\biggr)\end{gathered} \tag{36}$$

для $n=1,2,\dots$. Тождества

$$\zeta(m+2,\{1\}_n)=\zeta(n+2,\{1\}_m),\qquad m,n=0,1,2,\dots,$$

могут быть получены как с помощью метода производящей функции [10], так и с помощью доказанной теоремы 7.

Несколько иной пример производящих функций связан с обобщением тождества Апери [1]

$$\zeta(3)=\frac52\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}};$$

именно, справедливы разложения [16], [2]

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\zeta(2n+3)t^{2n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3(1-t^2/k^2)}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}\Bigl(\frac12+\frac{2}{1-t^2/k^2}\Bigr)\prod_{l=1}^{k-1}\Bigl(1-\frac{t^2}{l^2}\Bigr),\\ \sum_{n=0}^{\infty}\zeta(4n+3)t^{4n}&=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3(1-t^4/k^4)}=\frac52\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}\frac{1}{1-t^4/k^4}\prod_{l=1}^{k-1}\frac{1+4t^4/l^4}{1-t^4/l^4}.\end{aligned} \tag{37}$$

Доказательство этих и некоторых других тождеств основано на применении формул преобразования и суммирования *обобщенных гипергеометрических функций*, подобно применению формулы (35) при доказательстве теоремы 8. Тождества (37) оказываются чрезвычайно полезными для быстрого вычисления значений дзета-функции Римана в нечетных целых точках.

Отметим также соотношения

$$\tilde{\zeta}(\{2\}_n, 1) = 2\zeta(2n+1), \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{38}$$

получающиеся в результате последовательного применения результатов работ [26] (или [33]) и [32]. Равенства (38) также обобщают тождество Эйлера (5) и тесно связаны с одним из способов доказательства теорем Апери [1] и Ривоаля [22], упомянутых в разделе 1. Однако вывод соотношений (38) из теорем 4–6 в случае произвольного n до сих пор неизвестен.

8. Квази-шаффл-произведения

Предложенная Хоффманом [12] конструкция позволяет рассматривать каждую из алгебр $\mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}$ и $\mathfrak{H}^1_*$ как частный случай некоторой общей алгебраической структуры. Именно этому обобщающему объекту и посвящен настоящий раздел.

Рассмотрим градуированную по степени некоммутативную полиномиальную алгебру $\mathfrak{A} = \mathcal{K}\langle A\rangle$ над полем $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$; здесь A – локально конечное множество образующих (т.е. множество образующих фиксированной положительной степени конечно). Как обычно, элементы множества A будем называть буквами, а мономы от этих букв – словами. Для любого слова w через $\ell(w)$ обозначим его длину (количество букв, участвующих в его записи), а через $|w|$ – его вес или степень (сумму степеней букв). Единственное слово длины 0 и веса 0 – пустое слово – обозначим через $\mathbf{1}$; оно является единицей алгебры $\mathfrak{A}$. Нейтральный элемент алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим через $\mathbf{0}$.

Определим теперь произведение $\circ$, аддитивно распространяя его на всю алгебру $\mathfrak{A}$, с помощью следующих правил:

$$\mathbf{1} \circ w = w \circ \mathbf{1} = w \tag{39}$$

для любого слова w,

$$a_j u \circ a_k v = a_j(u \circ a_k v) + a_k(a_j u \circ v) + [a_j, a_k](u \circ v) \tag{40}$$

для любых слов u, v и букв $a_j, a_k \in A$, где функционал

$$[\,\cdot\,,\,\cdot\,]\colon \bar{A} \times \bar{A} \to \bar{A} \tag{41}$$

($\bar{A} := A \cup \{\mathbf{0}\}$) удовлетворяет свойствам

(S0) $[a, \mathbf{0}] = \mathbf{0}$ для любого $a \in \bar{A}$;
(S1) $[[a_j, a_k], a_l] = [a_j, [a_k, a_l]]$ для любых $a_j, a_k, a_l \in \bar{A}$;
(S2) либо $[a_j, a_k] = \mathbf{0}$, либо $|[a_k, a_j]| = |a_j| + |a_k|$ для любых $a_j, a_k \in A$.

Тогда $\mathfrak{A}_\circ := (\mathfrak{A}, \circ)$ является ассоциативной градуированной $\mathcal{K}$-алгеброй, а в случае справедливости дополнительного свойства

(S3) $[a_j, a_k] = [a_k, a_j]$ для любых $a_j, a_k \in \bar{A}$

она является коммутативной $\mathcal{K}$-алгеброй [12; теорема 2.1].

Если $[a_j, a_k] = 0$ для всех букв $a_j, a_k \in A$, то $(\mathfrak{A}, \circ)$ является стандартной шаффл-алгеброй; в частном случае $A = \{x_0, x_1\}$ мы получаем шаффл-алгебру $\mathfrak{A}_\circ = \mathfrak{H}_{\sqcup\!\sqcup}$ кратных дзета-значений (или полилогарифмов). Стаффл-алгебра $\mathfrak{H}^1_*$ отвечает выбору образующих элементов $A = \{y_j\}_{j=1}^{\infty}$ и функционала

$$[y_j, y_k] = y_{j+k} \qquad \text{для целых } j \geqslant 1 \text{ и } k \geqslant 1.$$

Определим на алгебре $\mathfrak{A}$ с заданным функционалом (41) двойственное произведение $\bar{\circ}$ при помощи правил

$$\mathbf{1} \mathbin{\bar{\circ}} w = w \mathbin{\bar{\circ}} \mathbf{1} = w,$$
$$ua_j \mathbin{\bar{\circ}} va_k = (u \mathbin{\bar{\circ}} va_k)a_j + (ua_j \mathbin{\bar{\circ}} v)a_k + (u \mathbin{\bar{\circ}} v)[a_j, a_k]$$

вместо (39), (40) соответственно. Тогда $\mathfrak{A}_{\bar{\circ}} := (\mathfrak{A}, \bar{\circ})$ также является (коммутативной в случае выполнения свойства (S3)) градуированной $\mathcal{K}$-алгеброй.

Теорема 9. *Алгебры $\mathfrak{A}_\circ$ и $\mathfrak{A}_{\bar{\circ}}$ совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать соотношение

$$w_1 \circ w_2 = w_1 \mathbin{\bar{\circ}} w_2 \tag{42}$$

для любых слов $w_1, w_2 \in \mathcal{K}\langle A\rangle$. Будем проводить доказательство индукцией по величине $\ell(w_1) + \ell(w_2)$. Если $\ell(w_1) = 0$ или $\ell(w_2) = 0$, то соотношение (42) превращается в очевидное тождество. Если $\ell(w_1) = \ell(w_2) = 1$, т.е. $w_1 = a_1$ и $w_2 = a_2$ являются буквами, то

$$a_1 \circ a_2 = a_1a_2 + a_2a_1 + [a_1, a_2] = a_1 \mathbin{\bar{\circ}} a_2.$$

В случае $\ell(w_1) > 1$ и $\ell(w_2) = 1$, записывая $w_1 = a_1ua_2$ и $w_2 = a_3 \in A$ и используя индукционное предположение, получаем

$$\begin{aligned}
a_1ua_2 \circ a_3 &= a_1(ua_2 \circ a_3) + a_3a_1ua_2 + [a_1, a_3]ua_2 \\
&= a_1(ua_2 \mathbin{\bar{\circ}} a_3) + a_3a_1ua_2 + [a_1, a_3]ua_2 \\
&= a_1((u \mathbin{\bar{\circ}} a_3)a_2 + ua_2a_3 + u[a_2, a_3]) + a_3a_1ua_2 + [a_1, a_3]ua_2 \\
&= a_1((u \circ a_3)a_2 + ua_2a_3 + u[a_2, a_3]) + a_3a_1ua_2 + [a_1, a_3]ua_2 \\
&= (a_1(u \circ a_3) + a_3a_1u + [a_1, a_3]u)a_2 + a_1ua_2a_3 + a_1u[a_2, a_3] \\
&= (a_1u \circ a_3)a_2 + a_1ua_2a_3 + a_1u[a_2, a_3] \\
&= (a_1u \mathbin{\bar{\circ}} a_3)a_2 + a_1ua_2a_3 + a_1u[a_2, a_3] \\
&= a_1ua_2 \mathbin{\bar{\circ}} a_3.
\end{aligned}$$

Аналогично (но с более громоздкими выкладками) мы действуем в оставшемся случае $\ell(w_1) > 1$ и $\ell(w_2) > 1$. Полагая $w_1 = a_1ua_2$, $w_2 = a_3va_4$ и используя индукционное предположение, находим

$$\begin{aligned}
a_1ua_2 \circ a_3va_4 &= a_1(ua_2 \circ a_3va_4) + a_3(a_1ua_2 \circ va_4) + [a_1, a_3](ua_2 \circ va_4) \\
&= a_1(ua_2 \mathbin{\bar{\circ}} a_3va_4) + a_3(a_1ua_2 \mathbin{\bar{\circ}} va_4) + [a_1, a_3](ua_2 \mathbin{\bar{\circ}} va_4)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1((u \,\bar\circ\, a_3va_4)a_2 + (ua_2 \,\bar\circ\, a_3v)a_4 + (u \,\bar\circ\, a_3v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + a_3((a_1u \,\bar\circ\, va_4)a_2 + (a_1ua_2 \,\bar\circ\, v)a_4 + (a_1u \,\bar\circ\, v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + [a_1, a_3]((u \,\bar\circ\, va_4)a_2 + (ua_2 \,\bar\circ\, v)a_4 + (u \,\bar\circ\, v)[a_2, a_4]) \\
&= a_1((u \circ a_3va_4)a_2 + (ua_2 \circ a_3v)a_4 + (u \circ a_3v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + a_3((a_1u \circ va_4)a_2 + (a_1ua_2 \circ v)a_4 + (a_1u \circ v)[a_2, a_4]) \\
&\quad + [a_1, a_3]((u \circ va_4)a_2 + (ua_2 \circ v)a_4 + (u \circ v)[a_2, a_4]) \\
&= (a_1(u \circ a_3va_4) + a_3(a_1u \circ va_4) + [a_1, a_3](u \circ va_4))a_2 \\
&\quad + (a_1(ua_2 \circ a_3v) + a_3(a_1ua_2 \circ v) + [a_1, a_3](ua_2 \circ v))a_4 \\
&\quad + (a_1(u \circ a_3v) + a_3(a_1u \circ v) + [a_1, a_3](u \circ v))[a_2, a_4] \\
&= (a_1u \circ a_3va_4)a_2 + (a_1ua_2 \circ a_3v)a_4 + (a_1u \circ a_3v)[a_2, a_4] \\
&= (a_1u \,\bar\circ\, a_3va_4)a_2 + (a_1ua_2 \,\bar\circ\, a_3v)a_4 + (a_1u \,\bar\circ\, a_3v)[a_2, a_4] \\
&= a_1ua_2 \,\bar\circ\, a_3va_4.
\end{aligned}
$$

Это завершает доказательство теоремы.

Замечание. При наличии свойства (S3) приведенные рассуждения можно значительно упростить. Однако нам представляется важным совпадение алгебр $\mathfrak{A}_\circ$ и $\mathfrak{A}_{\bar\circ}$ в самой общей ситуации, когда функционал (41) удовлетворяет условиям (S0)–(S2).

В заключение этого раздела докажем еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Для любой буквы $a \in A$ и любых слов $u, v \in \mathfrak{A}$ справедливо тождество*

$$
a \circ uv - (a \circ u)v = u(a \circ v - av). \tag{43}
$$

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по количеству букв в слове u. Если слово u пустое, то тождество (43) является тавтологией. В противном случае запишем слово u в виде $u = a_1u_1$, где $a_1 \in A$ и слово u_1 состоит из меньшего количества букв, т.е. для него тождество

$$
a \circ u_1v - (a \circ u_1)v = u_1(a \circ v - av)
$$

выполнено. Тогда

$$
\begin{aligned}
a \circ uv - (a \circ u)v &= a \circ a_1u_1v - (a \circ a_1u_1)v \\
&= aa_1u_1v + a_1(a \circ u_1v) + [a, a_1]u_1v \\
&\qquad - (aa_1u_1 + a_1(a \circ u_1) + [a, a_1]u_1)v \\
&= a_1(a \circ u_1v - (a \circ u_1)v) = a_1u_1(a \circ v - av) \\
&= u(a \circ v - av),
\end{aligned}
$$

что и требовалось доказать.

9. Функциональная модель стаффл-алгебры

Функциональная модель стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*$ не может быть описана в полной аналогии с полилогарифмической моделью шаффл-алгебры $\mathfrak{H}_{\sqcup\sqcup}$, поскольку правило (17) не имеет дифференциальной интерпретации подобно (16). Поэтому мы воспользуемся разностной интерпретацией правила (17), именно (простейшим) разностным оператором

$$Df(t) = f(t-1) - f(t).$$

Как несложно проверить,

$$D\big(f_1(t)f_2(t)\big) = Df_1(t)\cdot f_2(t) + f_1(t)\cdot Df_2(t) + Df_1(t)\cdot Df_2(t), \tag{44}$$

а обратное отображение

$$Ig(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(t+n),$$

т.е. $D(Ig(t)) = g(t)$, определено с точностью до постоянного слагаемого при условии, что на функцию $g(t)$ накладываются некоторые дополнительные ограничения при $t \to +\infty$, например $g(t) = O(t^{-2})$.

Замечание. Согласно [6; §3, п. 1] оператор D связан с оператором дифференцирования $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ следующим образом:

$$D = e^{-\mathrm{d}/\mathrm{d}t} - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\,.$$

Указанное равенство обосновывается формальным применением формулы Тейлора:

$$f(t-1) = f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} f(t);$$

на самом деле, последнее равенство верно для любой целой функции. Экспоненцирование дифференцирований (на алгебрах слов) в связи с обобщением теоремы 1 проводится в разделе 12 далее.

Естественная аналогия с леммами 1, 2 согласно (17) и (44) подразумевает наличие функций $\omega_j(t)$, удовлетворяющих условиям

$$\omega_j(t)\omega_k(t) = \omega_{j+k}(t) \qquad \text{для целых } j \geqslant 1 \text{ и } k \geqslant 1.$$

Самый простой выбор задается формулами

$$\omega_j(t) = \frac{1}{t^j}, \qquad j = 1, 2, \dots,$$

и это приводит нас к функциям

$$\mathrm{Ri}_{\boldsymbol{s}}(t) = \mathrm{Ri}_{s_1,\dots,s_{l-1},s_l}(t) := I\bigg(\frac{1}{t^{s_l}}\,\mathrm{Ri}_{s_1,\dots,s_{l-1}}(t)\bigg), \qquad \mathrm{Ri}_{\mathbf{1}}(t) := 1,$$

определяемым индукцией по длине мультииндекса. Согласно определению мы получаем

$$D\,\mathrm{Ri}_{uy_j}(t) = \frac{1}{t^j}\,\mathrm{Ri}_u(t), \tag{45}$$

что в некотором смысле является дискретным аналогом формулы (25).

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\operatorname{Ri}_{\boldsymbol{s}}(t)=\sum_{n_1>\dots>n_{l-1}>n_l\geqslant 1}\frac{1}{(t+n_1)^{s_1}\cdots(t+n_{l-1})^{s_{l-1}}(t+n_l)^{s_l}}\,; \tag{46}$$

в частности,

$$\operatorname{Ri}_{\boldsymbol{s}}(0)=\zeta(\boldsymbol{s}),\qquad \boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^l,\quad s_1\geqslant 2,\ s_2\geqslant 1,\ \dots,\ s_l\geqslant 1, \tag{47}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\operatorname{Ri}_{\boldsymbol{s}}(t)=0,\qquad \boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}^l,\quad s_1\geqslant 2,\ s_2\geqslant 1,\ \dots,\ s_l\geqslant 1. \tag{48}$$

Доказательство. Пользуясь определением, находим

$$\begin{aligned}\operatorname{Ri}_{\boldsymbol{s}}(t)&=I\biggl(\frac{1}{t^{s_l}}\operatorname{Ri}_{s_1,\dots,s_{l-1}}(t)\biggr)\\&=I\biggl(\frac{1}{t^{s_l}}\sum_{n_1>\dots>n_{l-1}\geqslant 1}\frac{1}{(t+n_1)^{s_1}\cdots(t+n_{l-1})^{s_{l-1}}}\biggr)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(t+n)^{s_l}}\sum_{n_1>\dots>n_{l-1}\geqslant 1}\frac{1}{(t+n_1+n)^{s_1}\cdots(t+n_{l-1}+n)^{s_{l-1}}}\\&=\sum_{n_1'>\dots>n_{l-1}'>n\geqslant 1}\frac{1}{(t+n_1')^{s_1}\cdots(t+n_{l-1}')^{s_{l-1}}(t+n)^{s_l}}\,,\end{aligned}$$

что и приводит нас к требуемой формуле (46).

Определим теперь произведение $\bar{*}$ на $\mathfrak{H}^1$ (и, в частности, на подалгебре $\mathfrak{H}^0$) с помощью правил

$$\begin{gathered}\mathbf{1}\mathbin{\bar{*}}w=w\mathbin{\bar{*}}\mathbf{1}=w,\\ uy_j\mathbin{\bar{*}}vy_k=(u\mathbin{\bar{*}}vy_k)y_j+(uy_j\mathbin{\bar{*}}v)y_k+(u\mathbin{\bar{*}}v)y_{j+k}\end{gathered} \tag{49}$$

вместо (15), (17).

Лемма 6. *Отображение* $w\mapsto\operatorname{Ri}_w(t)$ *является гомоморфизмом алгебры* $(\mathfrak{H}^0,\bar{*})$ *на* $C([0,+\infty);\mathbb{R})$.

Доказательство. Нам необходимо проверить соотношение

$$\operatorname{Ri}_{w_1\mathbin{\bar{*}}w_2}(z)=\operatorname{Ri}_{w_1}(z)\operatorname{Ri}_{w_2}(z)\quad\text{для всех}\quad w_1,w_2\in\mathfrak{H}^0; \tag{50}$$

не ограничивая общности, будем считать w_1,w_2 словами алгебры $\mathfrak{H}^0$. Докажем соотношение (50) индукцией по величине $\ell(w_1)+\ell(w_2)$; если $w_1=\mathbf{1}$ или $w_2=\mathbf{1}$, то справедливость (50) очевидна ввиду (49). В противном случае запишем $w_1 = uy_j$, $w_2 = vy_k$ и воспользуемся формулами (44), (45) и индуктивным предположением:

$$\begin{aligned}
D\bigl(\mathrm{Ri}_{w_1}(t)\,\mathrm{Ri}_{w_2}(t)\bigr) &= D\bigl(\mathrm{Ri}_{uy_j}(t)\,\mathrm{Ri}_{vy_k}(t)\bigr) \\
&= D\,\mathrm{Ri}_{uy_j}(t)\cdot\mathrm{Ri}_{vy_k}(t) + \mathrm{Ri}_{uy_j}(t)\cdot D\,\mathrm{Ri}_{vy_k}(t) \\
&\quad + D\,\mathrm{Ri}_{uy_j}(t)\cdot D\,\mathrm{Ri}_{vy_k}(t) \\
&= \frac{1}{t^j}\,\mathrm{Ri}_u(t)\,\mathrm{Ri}_{vy_k}(t) + \frac{1}{t^k}\,\mathrm{Ri}_{uy_j}(t)\,\mathrm{Ri}_v(t) + \frac{1}{t^{j+k}}\,\mathrm{Ri}_u(t)\,\mathrm{Ri}_v(t) \\
&= \frac{1}{t^j}\,\mathrm{Ri}_{u \,\bar{*}\, vy_k}(t) + \frac{1}{t^k}\,\mathrm{Ri}_{uy_j \,\bar{*}\, v}(t) + \frac{1}{t^{j+k}}\,\mathrm{Ri}_{u \,\bar{*}\, v}(t) \\
&= D\bigl(\mathrm{Ri}_{(u \,\bar{*}\, vy_k)y_j}(t) + \mathrm{Ri}_{(uy_j \,\bar{*}\, v)y_k}(t) + \mathrm{Ri}_{(u \,\bar{*}\, v)y_{j+k}}(t)\bigr) \\
&= D\,\mathrm{Ri}_{uy_j \,\bar{*}\, vy_k}(t) \\
&= D\,\mathrm{Ri}_{w_1 \,\bar{*}\, w_2}(t).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mathrm{Ri}_{w_1}(t)\,\mathrm{Ri}_{w_2}(t) = \mathrm{Ri}_{w_1 \,\bar{*}\, w_2}(t) + C \tag{51}$$

и, устремляя t к $+\infty$, согласно (48) получаем $C = 0$. Таким образом, соотношение (51) превращается в требуемое равенство (50). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 5. Согласно (47) теорема 5 следует из леммы 6 и теоремы 9.

10. Гомоморфизм Хоффмана для стаффл-алгебры

Другой способ доказательство теоремы 5 (а также леммы 6) основан на гомоморфизме Хоффмана $\phi\colon \mathfrak{H}^1 \to \mathbb{Q}[[t_1, t_2, \dots]]$, где $\mathbb{Q}[[t_1, t_2, \dots]]$ есть $\mathbb{Q}$-алгебра формальных степенных рядов от счетного множества (коммутирующих) переменных $t_1, t_2, \dots$ (см. [11], [13]). Именно, $\mathbb{Q}$-линейное отображение ϕ определяется правилами $\phi(1) := 1$ и

$$\phi(y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}) := \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_l \geqslant 1} t_{n_1}^{s_1} t_{n_2}^{s_2} \cdots t_{n_l}^{s_l}, \qquad \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}^l, \quad s_1 \geqslant 1, \ \dots, \ s_l \geqslant 1.$$

Образом гомоморфизма (и, в действительности, мономорфизма) ϕ является алгебра $QSym$ квазисимметрических функций. Здесь под *квазисимметрической функцией* понимается формальный степенной ряд (ограниченной степени) от переменных $t_1, t_2, \dots$, у которого коэффициенты при мономах $t_{n_1}^{s_1} t_{n_2}^{s_2} \cdots t_{n_l}^{s_l}$ и $t_{n_1'}^{s_1} t_{n_2'}^{s_2} \cdots t_{n_l'}^{s_l}$ совпадают, как только $n_1 > n_2 > \dots > n_l$ и $n_1' > n_2' > \dots > n_l'$ (наше определение несколько отличается от соответствующего определения из [13], но приводит к одной и той же алгебре $QSym$ квазисимметрических функций). В этих терминах гомоморфизм $w \mapsto \mathrm{Ri}_w(t)$ из леммы 6 определяется как ограничение гомоморфизма ϕ на $\mathfrak{H}^0$ с помощью подстановки $t_n = 1/(t+n)$, $n = 1, 2, \dots$.

Другой подход к доказательству стаффл-соотношений для кратных дзета-значений был недавно предложен Картье (см. [28]). Несколько модифицируя оригинальную схему Картье, мы продемонстрируем основные идеи этого подхода на примере доказательства тождества Эйлера

$$\zeta(s_1)\zeta(s_2) = \zeta(s_1 + s_2) + \zeta(s_1, s_2) + \zeta(s_2, s_1), \qquad s_1 \geqslant 2, \ s_2 \geqslant 2. \tag{52}$$

Для этого нам необходимо иное по сравнению с (31) интегральное представление

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \int\limits_{[0,1]^{|\boldsymbol{s}|}} \cdots \int \prod_{j=1}^{l-1} \frac{t_1 t_2 \cdots t_{s_1+\dots+s_j}}{1 - t_1 t_2 \cdots t_{s_1+\dots+s_j}} \cdot \frac{\mathrm{d}t_1\, \mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_{|\boldsymbol{s}|}}{1 - t_1 t_2 \cdots t_{s_1+s_2+\dots+s_l}}, \quad l = \ell(\boldsymbol{s}), \tag{53}$$

для допустимых мультииндексов $\boldsymbol{s}$, на которое нам любезно указал Нестеренко и которое доказывается непосредственным интегрированием ряда

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.$$

Осуществляя в элементарном тождестве

$$\frac{1}{(1-u)(1-v)} = \frac{1}{1-uv} + \frac{u}{(1-u)(1-uv)} + \frac{v}{(1-v)(1-uv)}$$

подстановку $u = t_1 \cdots t_{s_1}$, $v = t_{s_1+1} \cdots t_{s_2}$ и интегрируя по гиперкубу $[0,1]^{s_1+s_2}$ в соответствии с (53), мы приходим к тождеству (52).

11. Дифференцирования

Рассмотрим, как и в разделе 8, градуированную некоммутативную полиномиальную алгебру $\mathfrak{A} = \mathcal{K}\langle A \rangle$ над полем $\mathcal{K}$ характеристики 0 с локально конечным множеством образующих A. Под *дифференцированием* алгебры $\mathfrak{A}$ понимается линейное отображение $\delta\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ (градуированных $\mathcal{K}$-векторных пространств), удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\delta(uv) = \delta(u)v + u\delta(v) \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathfrak{A}. \tag{54}$$

Коммутатор двух дифференцирований $[\delta_1, \delta_2] := \delta_1\delta_2 - \delta_2\delta_1$ является дифференцированием, так что множество всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$ образует алгебру Ли $Der(\mathfrak{A})$ (естественным образом градуированную по степени).

Как несложно заметить, дифференцирование $\delta \in Der(\mathfrak{A})$ достаточно задать на образующих A алгебры $\mathfrak{A}$, распространяя его на всю алгебру по линейности и пользуясь правилом (54).

Следующее утверждение дает примеры дифференцирований алгебры $\mathfrak{A}$, наделенной дополнительным умножением $\circ$ с условиями (39), (40).

Теорема 10. *Для любой буквы $a \in A$ отображение*

$$\delta_a\colon w \mapsto aw - a \circ w \tag{55}$$

является дифференцированием.

Доказательство. Линейность отображения δ_a очевидна. Согласно лемме 4 для любых слов $u, v \in \mathfrak{A}$ имеем

$$\begin{aligned}\delta_a(uv) &= auv - a \circ uv = auv - (a \circ u)v - u(a \circ v - av)\\ &= (\delta_a u)v + u(\delta_a v),\end{aligned}$$

так что (55) действительно является дифференцированием.

Как следует из теоремы 10, отображения $\delta_{\sqcup\!\sqcup} \colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ и $\delta_* \colon \mathfrak{H}^1 \to \mathfrak{H}^1$, определяемые равенствами

$$\delta_{\sqcup\!\sqcup} \colon w \mapsto x_1 w - x_1 \sqcup\!\sqcup\, w, \qquad \delta_* \colon w \mapsto y_1 w - y_1 * w = x_1 w - x_1 * w, \tag{56}$$

являются дифференцированиями; согласно правилу (18) отображение δ_* является дифференцированием на всей алгебре $\mathfrak{H}$. Отметим действие дифференцирований (56) на образующих алгебры, полученное в соответствии с правилами (15)–(18):

$$\delta_{\sqcup\!\sqcup} x_0 = -x_0 x_1, \quad \delta_{\sqcup\!\sqcup} x_1 = -x_1^2, \qquad \delta_* x_0 = 0, \quad \delta_* x_1 = -x_1^2 - x_0 x_1. \tag{57}$$

Для любого дифференцирования δ алгебры $\mathfrak{H}$ (или ее подалгебры $\mathfrak{H}^0$) определим двойственное дифференцирование $\overline{\delta} = \tau\delta\tau$, где τ – анти-автоморфизм алгебры $\mathfrak{H}$ (и $\mathfrak{H}^0$) из раздела 6. Дифференцирование δ будем называть *симметрическим*, если $\overline{\delta} = \delta$, и *антисимметрическим*, если $\overline{\delta} = -\delta$. Поскольку $\tau x_0 = x_1$, (анти)симметрическое дифференцирование δ однозначно восстанавливается по значению на одном из образующих x_0 или x_1, в то время как произвольное дифференцирование восстанавливается по значению на обоих образующих.

Определим теперь дифференцирование D алгебры $\mathfrak{H}$ равенствами $Dx_0 = 0$, $Dx_1 = x_0 x_1$ (так что $Dy_s = y_{s+1}$ для образующих y_s алгебры $\mathfrak{H}^1$) и перепишем утверждение теоремы 1 в следующем виде.

Теорема 11 (теорема о дифференцировании [13; теорема 2.1]). *Для любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ справедливо тождество*

$$\zeta(Dw) = \zeta(\overline{D}w). \tag{58}$$

Доказательство. Записывая слово $w \in \mathfrak{H}^0$ в виде $w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}$ $(s_1 > 1)$, отметим, что левая часть равенства (7) отвечает элементу

$$Dw = D(y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}) = y_{s_1+1} y_{s_2} \cdots y_{s_l} + y_{s_1} y_{s_2+1} y_{s_3} \cdots y_{s_l} + \cdots + y_{s_1} \cdots y_{s_{l-1}} y_{s_l+1} \tag{59}$$

алгебры $\mathfrak{H}^0$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\overline{D}w &= \tau D\bigl(x_0 x_1^{s_l-1} x_0 x_1^{s_{l-1}-1} \cdots x_0 x_1^{s_2-1} x_0 x_1^{s_1-1}\bigr)\\ &= \tau \sum_{\substack{k=1\\ s_k \geqslant 2}}^{l} \sum_{j=0}^{s_k-2} x_0 x_1^{s_l-1} \cdots x_0 x_1^{s_{k+1}-1} x_0 x_1^{j} x_0 x_1^{s_k-j-1} x_0 x_1^{s_{k-1}-1} \cdots x_0 x_1^{s_1-1}\\ &= \sum_{\substack{k=1\\ s_k \geqslant 2}}^{l} \sum_{j=0}^{s_k-2} x_0^{s_1-1} x_1 \cdots x_0^{s_{k-1}-1} x_1 x_0^{s_k-j-1} x_1 x_0^{j} x_1 x_0^{s_{k+1}-1} x_1 \cdots x_0^{s_l-1} x_1,\end{aligned} \tag{60}$$

что отвечает правой части равенства (7). Применяя теперь к обеим частям полученных равенств (59), (60) отображение ζ, из теоремы 1 получаем требуемое тождество (58).

Замечание. Ослабить требование $w \in \mathfrak{H}^0$ в теореме 11 нельзя; для слова $w = x_1$ равенство (58) оказывается неверным:

$$\zeta(Dx_1) = \zeta(x_0x_1) \neq 0 = \zeta(\overline{D}x_1).$$

Доказательство теоремы 6. Сравнивая действие (57) дифференцирований (56) с действием $D, \overline{D}$ на образующих алгебры $\mathfrak{H}$:

$$Dx_0 = 0, \quad Dx_1 = x_0x_1, \qquad \overline{D}x_0 = x_0x_1, \quad \overline{D}x_1 = 0,$$

заключаем, что $\delta_* - \delta_{ш} = \overline{D} - D$. Поэтому применение теоремы 11 для слова $w \in \mathfrak{H}^0$ приводит нас к требуемому равенству:

$$\zeta(x_1 ш w - x_1 * w) = \zeta\big((\delta_* - \delta_{ш})w\big) = \zeta\big((\overline{D} - D)w\big) = \zeta(\overline{D}w) - \zeta(Dw) = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание. Другое доказательство теоремы 6, основанное на шаффл- и стаффл-соотношениях для так называемых *раскрашенных* полилогарифмов

$$\mathrm{Li}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{z}) = \mathrm{Li}_{(s_1,s_2,\dots,s_l)}(z_1, z_2, \dots, z_l) := \sum_{n_1>n_2>\dots>n_l\geqslant 1} \frac{z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_l^{n_l}}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_l^{s_l}}, \tag{61}$$

можно найти в [28]. (Как несложно заметить, специализация $z_2 = \dots = z_l = 1$ превращает функции (61) в обобщенные полилогарифмы (22).) Мы не ставим цели изложить в данном обзоре свойства функциональной модели (61), отсылая заинтересованного читателя к работам [4], [7], [28].

12. Дифференцирования Ихары–Канеко и соотношения Оно

Теорема 11 имеет естественное обобщение. Для каждого $n \geqslant 1$ определим антисимметрическое дифференцирование $\partial_n \in Der(\mathfrak{H})$ соотношением $\partial_n x_0 = x_0(x_0 + x_1)^{n-1}x_1$; как было отмечено в доказательстве теоремы 6, $\partial_1 = \overline{D} - D = \delta_* - \delta_{ш}$. Справедлив следующий результат.

Теорема 12 [14] (см. также [13]). *Для каждого $n \geqslant 1$ и любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ справедливо тождество*

$$\zeta(\partial_n w) = 0. \tag{62}$$

Далее мы излагаем схему доказательства этой теоремы, приводимого в препринте [14] (доказательство в [13] основано на иных идеях).

Следующий результат, полученный в работе [21] с помощью метода производящей функции, содержит как частные случаи теоремы 1, 3, 7 (соответствующие импликации также приводятся в [21]).

Теорема 13 (соотношения Оно). *Пусть слово $w \in \mathfrak{H}^0$ и двойственное ему $w' = \tau w \in \mathfrak{H}^0$ имеют следующие записи в терминах образующих алгебры $\mathfrak{H}^1$:*

$$w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_l}, \qquad w' = y_{s'_1} y_{s'_2} \cdots y_{s'_k}.$$

Тогда для любого целого $n \geqslant 0$ справедливо тождество

$$\sum_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_l \geqslant 0 \\ e_1+e_2+\dots+e_l=n}} \zeta(y_{s_1+e_1} y_{s_2+e_2} \cdots y_{s_l+e_l}) = \sum_{\substack{e_1, e_2, \dots, e_k \geqslant 0 \\ e_1+e_2+\dots+e_k=n}} \zeta(y_{s'_1+e_1} y_{s'_2+e_2} \cdots y_{s'_k+e_k}).$$

Следуя [14], для каждого целого $n \geqslant 1$ определим дифференцирование $D_n \in Der(\mathfrak{H})$, полагая $D_n x_0 = 0$ и $D_n x_1 = x_0^n x_1$. Несложно убедиться в том, что дифференцирования $D_1, D_2, \dots$ попарно коммутируют; это справедливо и для двойственных дифференцирований $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \dots$. Рассмотрим пополнение $\mathfrak{H}$, именно алгебру $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathbb{Q}\langle\langle x_0, x_1 \rangle\rangle$ – алгебру формальных степенных рядов от некоммутирующих переменных x_0, x_1 над полем $\mathbb{Q}$. Действие анти-автоморфизма τ и дифференцирований $\delta \in Der(\mathfrak{H})$ естественным образом продолжается на алгебру $\widehat{\mathfrak{H}}$. Для простоты запись $w \in \ker \zeta$ означает, что все однородные компоненты элемента $w \in \widehat{\mathfrak{H}}$ лежат в $\ker \zeta$. Отображения

$$\mathscr{D} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n}{n}, \qquad \overline{\mathscr{D}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{D}_n}{n}$$

являются дифференцированиями алгебры $\widehat{\mathfrak{H}}$, и, как следует из стандартной взаимосвязи между дифференцированием и гомоморфизмом, отображения

$$\sigma = \exp(\mathscr{D}), \qquad \overline{\sigma} = \tau\sigma\tau = \exp(\overline{\mathscr{D}})$$

являются автоморфизмами алгебры $\widehat{\mathfrak{H}}$. В этих терминах соотношения Оно могут быть сформулированы следующим образом.

Теорема 14 [14]. *Для любого слова $w \in \mathfrak{H}^0$ справедливо включение*

$$(\sigma - \overline{\sigma})w \in \ker \zeta. \tag{63}$$

Доказательство. Поскольку $\mathscr{D} x_0 = 0$ и

$$\mathscr{D} x_1 = \left(x_0 + \frac{x_0^2}{2} + \frac{x_0^3}{3} + \cdots\right) x_1 = (-\log(1 - x_0)) x_1,$$

можно заключить, что $\mathscr{D}^n x_0 = 0$ и $\mathscr{D}^n x_1 = (-\log(1-x_0))^n x_1$, откуда $\sigma x_0 = x_0$ и

$$\sigma x_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\log(1-x_0))^n x_1 = (1-x_0)^{-1} x_1 = (1 + x_0 + x_0^2 + x_0^3 + \cdots) x_1.$$

Следовательно, для слова $w=y_{s_1}y_{s_2}\cdots y_{s_l}\in\mathfrak{H}^0$ выполнено

$$\begin{aligned}\sigma w&=\sigma(x_0^{s_1-1}x_1x_0^{s_2-1}x_1\cdots x_0^{s_l-1}x_1)\\&=x_0^{s_1-1}(1+x_0+x_0^2+\cdots)x_1x_0^{s_2-1}(1+x_0+x_0^2+\cdots)x_1\cdots\\&\qquad\cdots x_0^{s_l-1}(1+x_0+x_0^2+\cdots)x_1\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{e_1,e_2,\dots,e_l\geqslant0\\e_1+e_2+\cdots+e_l=n}}x_0^{s_1-1+e_1}x_1x_0^{s_2-1+e_2}x_1\cdots x_0^{s_l-1+e_l}x_1;\end{aligned}$$

поэтому $\sigma w-\sigma\tau w\in\ker\zeta$ согласно теореме 13. Применяя теперь теорему 7, мы получаем требуемое включение (63).

Возвращаясь к дифференцированиям $\partial_1,\partial_2,\dots$, рассмотрим дифференцирование

$$\partial=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial_n}{n}\in Der(\widehat{\mathfrak{H}}).$$

Лемма 7. *Имеет место равенство*

$$\exp(\partial)=\overline{\sigma}\cdot\sigma^{-1}. \tag{64}$$

Доказательство. Прежде всего, отметим попарную перестановочность операторов ∂_n, $n=1,2,\dots$. Поскольку $\partial_n(x_0+x_1)=0$ для любого $n\geqslant1$, достаточно проверить равенство $\partial_n\partial_m x_0=\partial_m\partial_n x_0$ для $n,m\geqslant1$. С учетом $\partial_n(x_0+x_1)^k=0$ для любых $n\geqslant1$ и $k\geqslant0$ получаем

$$\begin{aligned}\partial_n\partial_m x_0&=\partial_n(x_0(x_0+x_1)^{m-1}x_1)\\&=x_0(x_0+x_1)^{n-1}x_1(x_0+x_1)^{m-1}x_1-x_0(x_0+x_1)^{m-1}x_0(x_0+x_1)^{n-1}x_1\\&=x_0(x_0+x_1)^{n-1}(x_0+x_1-x_0)(x_0+x_1)^{m-1}x_1\\&\qquad-x_0(x_0+x_1)^{m-1}(x_0+x_1-x_1)(x_0+x_1)^{n-1}x_1\\&=-x_0(x_0+x_1)^{n-1}x_0(x_0+x_1)^{m-1}x_1+x_0(x_0+x_1)^{m-1}x_1(x_0+x_1)^{n-1}x_1\\&=\partial_m\partial_n x_0,\end{aligned}$$

что и требовалось.

Рассмотрим семейство $\varphi(t)$, $t\in\mathbb{R}$, автоморфизмов алгебры $\widehat{\mathfrak{H}}_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\langle\langle x_0,x_1\rangle\rangle$, определенных на образующих $x_0'=x_0+x_1$ и x_1 следующим образом:

$$\varphi(t)\colon x_0'\mapsto x_0',\quad \varphi(t)\colon x_1\mapsto(1-x_0')^t x_1\biggl(1-\frac{1-(1-x_0')^t}{x_0'}x_1\biggr)^{-1},\qquad t\in\mathbb{R}.$$

Рутинная проверка [14] показывает, что

$$\varphi(t_1)\varphi(t_2)=\varphi(t_1+t_2),\quad \varphi(0)=\mathrm{id},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t)\Big|_{t=0}=\partial,\quad \varphi(1)=\overline{\sigma}\cdot\sigma^{-1};$$

значит, $\varphi(t)=\exp(t\partial)$ и подстановка $t=1$ приводит к требуемому результату (64).

Доказательство теоремы 12. Покажем теперь, как из теоремы 14 и леммы 7 следует теорема 12. С одной стороны, имеем

$$\partial = \log(\overline{\sigma} \cdot \sigma^{-1}) = \log(1 - (\sigma - \overline{\sigma})\sigma^{-1}) = -(\sigma - \overline{\sigma}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((\sigma - \overline{\sigma})\sigma^{-1})^{n-1}}{n} \sigma^{-1},$$

а с другой стороны,

$$\sigma - \overline{\sigma} = (1 - \overline{\sigma} \cdot \sigma^{-1})\sigma = (1 - \exp(\partial))\sigma = -\partial \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^{n-1}}{n!} \sigma,$$

откуда $\partial \mathfrak{H}^0 = (\sigma - \overline{\sigma})\mathfrak{H}^0$, и теорема 14 влечет требуемые тождества (62).

Существует ли более простой способ обоснования соотношений (62)? Явные вычисления [14] показывают, что $\partial_1 = \delta_* - \delta_{\sqcup\sqcup}$,

$$\begin{aligned}
\partial_2 &= [\delta_*, \overline{\delta}_*], \\
\partial_3 &= \frac{1}{2}[\delta_*, [\partial_1, \overline{\delta}_*]] - \frac{1}{2}[\delta_*, \partial_2] - \frac{1}{2}[\overline{\delta}_*, \partial_2], \\
\partial_4 &= \frac{1}{6}[\delta_*, [\partial_1, [\partial_1, \overline{\delta}_*]]] - \frac{1}{6}[\overline{\delta}_*, [\delta_*, [\partial_1, \overline{\delta}_*]]] + \frac{1}{6}[\partial_1, [\partial_2, \overline{\delta}_*]] + \frac{1}{3}[\partial_3, \delta_*] + \frac{1}{3}[\partial_3, \overline{\delta}_*]
\end{aligned}$$

и, кроме того, $\delta_* + \overline{\delta}_* = \delta_{\sqcup\sqcup} + \overline{\delta}_{\sqcup\sqcup}$; поэтому случаи $n = 1, 2, 3, 4$ в теореме 12 обслуживаются индукцией (с базой индукции – теоремой 11). Это мотивирует следующее предположение.

Гипотеза 3 [14]. *Для каждого $n \geqslant 1$ определенное выше антисимметрическое дифференцирование ∂_n содержится в подалгебре Ли алгебры $\mathrm{Der}(\mathfrak{H})$, порожденной дифференцированиями $\delta_*, \overline{\delta}_*, \delta_{\sqcup\sqcup}, \overline{\delta}_{\sqcup\sqcup}$.*

Отметим также, что в препринте [14] содержатся и иные (по сравнению с гипотезой 2) идеи полного описания тождеств для кратных дзета-значений в терминах регуляризованных шаффл-стаффл-соотношений.

13. Открытые вопросы

Наряду с отмеченными выше гипотезами 1–3 отметим еще ряд важных предположений о строении подпространства $\ker \zeta \subset \mathfrak{H}$. Через $\mathscr{Z}_k$ обозначим $\mathbb{Q}$-векторное подпространство в $\mathbb{R}$, порожденное кратными дзета-значениями веса k; при этом $\mathscr{Z}_0 = \mathbb{Q}$ и $\mathscr{Z}_1 = \{0\}$. Тогда $\mathbb{Q}$-подпространство $\mathscr{Z} \in \mathbb{R}$, порожденное всеми кратными дзета-значениями, является подалгеброй $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$, градуированной по весу.

Гипотеза 4 [8], [28]. *Как $\mathbb{Q}$-алгебра, $\mathscr{Z}$ является прямой суммой подпространств $\mathscr{Z}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$.*

Как несложно заметить, соотношения (19)–(21) для кратных дзета-значений однородны по весу, так что гипотеза 4 следует из гипотезы 2.

Обозначая через d_k размерность $\mathbb{Q}$-пространства $\mathscr{Z}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, отметим, что $d_0 = 1$, $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (поскольку $\zeta(2) \neq 0$), $d_3 = 1$ (поскольку $\zeta(3) = \zeta(2, 1) \neq 0$) и $d_4 = 1$ (поскольку $\mathscr{Z}_4 = \mathbb{Q}\pi^4$ согласно (32), (34) и (36)). Для $k \geqslant 5$ полученные тождества позволяют выписать оценки сверху; так, например, $d_5 \leqslant 2$, $d_6 \leqslant 2$, и т.д.

Гипотеза 5 [30]. *Для* $k \geqslant 3$ *справедливы рекуррентные соотношения*

$$d_k = d_{k-2} + d_{k-3};$$

иными словами,

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k = \frac{1}{1-t^2-t^3}\,.$$

Даже в случае положительного ответа на гипотезы 4 и 5 вопрос о выборе базиса трансцендентности алгебры $\mathscr{Z}$ и (или) рационального базиса $\mathbb{Q}$-пространств $\mathscr{Z}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, остается открытым. В этой связи нам представляется любопытным следующее предположение Хоффмана.

Гипотеза 6 [11]. *Для каждого* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *базис* $\mathbb{Q}$-*пространства* $\mathscr{Z}_k$ *задается множеством чисел*

$$\bigl\{\zeta(\boldsymbol{s}) : |\boldsymbol{s}| = k,\ s_j \in \{2,3\},\ j = 1, \ldots, \ell(\boldsymbol{s})\bigr\}. \tag{65}$$

Веским доводом в пользу гипотезы 6 является не только экспериментальное подтверждение при $k \leqslant 16$ (в предположении истинности гипотезы 2), но и согласованность размерности $\mathbb{Q}$-пространства, порожденного числами (65), с размерностью d_k пространств $\mathscr{Z}_k$ из гипотезы 5. Последний факт доказан Хоффманом в [11].

14. q-аналоги кратных дзета-значений

Спустя тридцать три года после работы Гаусса о гипергеометрических рядах Гейне рассмотрел [9] ряды, зависящие от дополнительного параметра q и обладающие схожими с гауссовыми рядами свойствами. Более того, (по крайней мере почленный) предельный переход при $q \to 1$ превращает q-ряды Гейне в гипергеометрические ряды, так что результаты Гаусса могут быть получены из соответствующих результатов для q-рядов с помощью указанного предельного перехода и теоремы об аналитическом продолжении.

Подобные q-расширения классических объектов возможны не только в анализе: заинтересованному читателю мы рекомендуем работу Хоффмана [12], в которой обсуждается возможная q-деформация стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*$. Цель этого раздела – обсудить проблемы q-расширения кратных дзета-значений.

Самый простой (и достаточно очевидный) способ заключается в следующем: для целых положительных $s_1, s_2, \ldots, s_l$ положим

$$\begin{aligned}\zeta_q^*(x_{\boldsymbol{s}}) &= \zeta_q^*(\boldsymbol{s}) = \zeta_q^*(s_1, s_2, \ldots, s_l)\\ &:= \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_l \geqslant 1} \frac{q^{n_1 s_1 + n_2 s_2 + \cdots + n_l s_l}}{(1-q^{n_1})^{s_1}(1-q^{n_2})^{s_2}\cdots(1-q^{n_l})^{s_l}}\,, \quad |q| < 1,\end{aligned} \tag{66}$$

и распространим $\mathbb{Q}$-линейное отображение ζ_q^* на всю алгебру $\mathfrak{H}^1$ по сложению. Несложные вычисления показывают, что в случае $s_1 > 1$ выполнено

$$\lim_{\substack{q \to 1\\ 0<q<1}} (1-q)^{|\boldsymbol{s}|} \zeta_q^*(\boldsymbol{s}) = \zeta(\boldsymbol{s}),$$

т.е. ряды в (66) действительно являются q-расширениями рядов (4). Кроме того, ζ_q^* является (q-параметрическим) гомоморфизмом стаффл-алгебры $\mathfrak{H}_*^1$; для доказательства этого факта достаточно рассмотреть специализацию $t_n = q^n/(1-q^n)$ гомоморфизма Хоффмана ϕ из раздела 10. Следовательно,

$$\zeta_q^*(w_1 * w_2) = \zeta_q^*(w_1)\zeta_q^*(w_2) \quad \text{для всех} \quad w_1, w_2 \in \mathfrak{H}^1.$$

Указанная модель кратных q-дзета-значений (а также обобщенных q-полилогарифмов) описывается в [23]; к ее основным недостаткам следует отнести отсутствие описания других линейных и полиномиальных соотношений над $\mathbb{Q}$, иными словами, отсутствие подходящего q-шаффл-произведения.

Другой способ q-расширения (не кратных) дзета-значений предложен одновременно и независимо в работах [15] и [34]:

$$\zeta_q(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{s-1}(n) q^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{s-1} q^n}{1-q^n}, \qquad s = 1, 2, \dots, \tag{67}$$

где $\sigma_{s-1}(n) = \sum_{d|n} d^{s-1}$ обозначает сумму степеней делителей; там же показаны предельные соотношения

$$\lim_{\substack{q \to 1 \\ 0<q<1}} (1-q)^s \zeta_q(s) = (s-1)! \cdot \zeta(s), \qquad s = 2, 3, \dots .$$

q-дзета-значения (67) могут быть просто пересчитаны в терминах (66) с $l = 1$, именно

$$\zeta_q(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1-q^n}, \quad \zeta_q(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{(1-q^n)^2}, \quad \zeta_q(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1+q^n)}{(1-q^n)^3},$$

$$\zeta_q(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1+4q^n+q^{2n})}{(1-q^n)^4}, \quad \zeta_q(5) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n(1+11q^n+11q^{2n}+q^{3n})}{(1-q^n)^5}$$

и в общем

$$\zeta_q(k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n \rho_k(q^n)}{(1-q^n)^k}, \qquad k = 1, 2, 3, \dots,$$

где многочлены $\rho_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ определяются рекурсивно с помощью формул

$$\rho_1 = 1, \qquad \rho_{k+1} = (1+(k-1)x)\rho_k + x(1-x)\rho_k' \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots$$

(см. [34]).

Для четных $s \geqslant 2$ ряды $E_s(q) = 1 - 2s\zeta_q(s)/B_s$, где числа Бернулли $B_s \in \mathbb{Q}$ определены в (3), известны как *ряды Эйзенштейна*. Это обстоятельство позволяет доказать совпадение колец $\mathbb{Q}[q, \zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6), \zeta_q(8), \zeta_q(10), \dots]$ и $\mathbb{Q}[q, \zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)]$ (ср. с соответствующим результатом из раздела 1 для обычных дзета-значений). Однако вопрос о создании модели кратных q-дзета-значений, включающей однократную модель (67), остается открытым. Естественные требования к подобной модели – наличие q-аналогов шаффл- и стаффл-произведений. В заключение укажем возможное q-расширение формулы Эйлера (5) для величины

$$\zeta_q(2,1) = \sum_{n_1 > n_2 \geqslant 1} \frac{q^{n_1}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})}.$$

Теорема 15. *Имеет место тождество*

$$2\zeta_q(2,1) = \zeta_q(3).$$

Доказательство. Как и в случае доказательства теоремы 1, мы воспользуемся методом простейших дробей, именно разложением

$$\frac{1}{(1-u)(1-uv)^s}=\frac{1}{(1-v)^s(1-u)}-\sum_{j=0}^{s-1}\frac{v}{(1-v)^{j+1}(1-uv)^{s-j}}\,,\quad s=1,2,3,\dots; \tag{68}$$

доказывается это тождество так же, как и (9), суммированием геометрической прогрессии в правой части. При $s=2$ домножим тождество (68) на $u(1+v)$:

$$\frac{u(1+v)}{(1-u)(1-uv)^2}=\frac{u(1+v)}{(1-v)^2(1-u)}-\frac{uv(1+v)}{(1-v)(1-uv)^2}-\frac{uv(1+v)}{(1-v)^2(1-uv)}\,,$$

положим $u=q^m$, $v=q^n$ и просуммируем по всем целым положительным m,n. В результате получим равенство, в правой части которого стоит двойная сумма

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^m(1+q^n)}{(1-q^m)(1-q^{n+m})^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^n(1+q^m)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2}\,,$$

а в левой

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\biggl(\frac{q^m(1+q^n)}{(1-q^n)^2(1-q^m)}-\frac{q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2}-\frac{q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)^2(1-q^{n+m})}\biggr)\\&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^n}{(1-q^n)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\biggl(\frac{q^m}{1-q^m}-\frac{q^{n+m}}{1-q^{n+m}}\biggr)-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2}\,.\end{aligned}$$

Перенося последнюю сумму из правой части в левую, получаем

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{q^n(1+q^m)+q^{n+m}(1+q^n)}{(1-q^n)(1-q^{n+m})^2}\\&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^n}{(1-q^n)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\biggl(\frac{q^m}{1-q^m}-\frac{q^{n+m}}{1-q^{n+m}}\biggr)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^n}{(1-q^n)^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{q^m}{1-q^m}\\&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+q^n}{(1-q^n)^2}\biggl(\frac{q^n}{1-q^n}+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{q^m}{1-q^m}\biggr)=\zeta_q(3)+\sum_{n>m\geqslant1}\frac{(1+q^n)q^m}{(1-q^n)^2(1-q^m)}\,.\end{aligned}\tag{69}$$

С другой стороны, левая часть последнего равенства может быть записана в виде $(n+m=l)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{q^n+2q^l+q^{l+n}}{(1-q^n)(1-q^l)^2}=\sum_{l>n\geqslant1}\frac{q^n+2q^l+q^{l+n}}{(1-q^l)^2(1-q^n)}\,, \tag{70}$$

так что окончательно, полагая $n_1=n$, $n_2=m$ в правой части (69) и $n_1=l$, $n_2=n$ в (70), мы получаем требуемое:

$$\begin{aligned}\zeta_q(3)&=\sum_{n_1>n_2\geqslant1}\frac{q^{n_2}+2q^{n_1}+q^{n_1+n_2}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})}-\sum_{n_1>n_2\geqslant1}\frac{(1+q^{n_1})q^{n_2}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})}\\&=\sum_{n_1>n_2\geqslant1}\frac{2q^{n_1}}{(1-q^{n_1})^2(1-q^{n_2})}\,.\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] R. Apéry. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.

[2] J. Borwein, D. Bradley. Empirically determined Apéry-like formulae for $\zeta(4n+3)$ // Experiment. Math. 1997. V. 6. №3. P. 181–194.

[3] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst. Evaluations of k-fold Euler/Zagier sums: A compendium of results for arbitrary k // Electron. J. Combin. 1997. V. 4. №2. #R5. Printed version // J. Combin. 1997. V. 4. №2. P. 31–49.

[4] J. M. Borwein, D. M. Bradley, D. J. Broadhurst, P. Lisoněk. Special values of multiple polylogarithms // Trans. Amer. Math. Soc. 2001. V. 353. №3. P. 907–941.

[5] L. Euler. Meditationes circa singulare serierum genus // Novi Comm. Acad. Sci. Petropol. 1775. V. 20. P. 140–186; Reprinted // Opera Omnia Ser. I. V. 15. Berlin: Teubner, 1927. P. 217–267.

[6] А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. М.: Наука, 1967.

[7] A. B. Goncharov. Polylogarithms in arithmetic and geometry // Proceedings of the International Congress of Mathematicians (ICM'94, Zürich, August 3–11, 1994) / ed. S. D. Chatterji. V. I. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 374–387.

[8] A. B. Goncharov. The double logarithm and Manin's complex for modular curves // Math. Res. Lett. 1997. V. 4. №5. P. 617–636.

[9] E. Heine. Über die Reihe ... // J. Reine Angew. Math. 1846. V. 32. P. 210–212.

[10] M. E. Hoffman. Multiple harmonic series // Pacific J. Math. 1992. V. 152. №2. P. 275–290.

[11] M. E. Hoffman. The algebra of multiple harmonic series // J. Algebra. 1997. V. 194. №2. P. 477–495.

[12] M. E. Hoffman. Quasi-shuffle products // J. Algebraic Combin. 2000. V. 11. №1. P. 49–68.

[13] M. E. Hoffman, Y. Ohno. Relations of multiple zeta values and their algebraic expression // Preprint, 2000; // E-print `math.QA/0010140`.

[14] K. Ihara, M. Kaneko. Derivation relations and regularized double shuffle relations of multiple zeta values // Preprint, 2000.

[15] M. Kaneko, N. Kurokawa, M. Wakayama. A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function // E-print `math.QA/0206171`.

[16] M. Koecher. Letter to the editor // Math. Intelligencer. 1979/1980. V. 2. №2. P. 62–64.

[17] F. Lindemann. Über die Zahl π // Math. Ann. 1882. V. 20. P. 213–225.

[18] H. M. Minh, G. Jacob, M. Petitot, N. E. Oussous. Aspects combinatoires des polylogarithmes et des sommes d'Euler–Zagier // Sém. Lothar. Combin. 1999. V. 43. Art. B43e (electronic); // `http://www.mat.univie.ac.at/~slc/wpapers/s43minh.html`.

[19] H. M. Minh, M. Petitot. Lyndon words, polylogarithms and the Riemann ζ function // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Vienna, 1997). Discrete Math. 2000. V. 217. №1–3. P. 273–292.

[20] H. M. Minh, M. Petitot, J. van der Hoeven. Shuffle algebra and polylogarithms // Formal Power Series and Algebraic Combinatorics (Toronto, ON, June 1998). Discrete Math. 2000. V. 225. №1–3. P. 217–230.

[21] Y. Ohno. A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values // J. Number Theory. 1999. V. 74. №1. P. 39–43.

[22] T. Rivoal. La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. №4. P. 267–270.

[23] K.-G. Schlesinger. Some remarks on q-deformed multiple polylogarithms // E-print `math.QA/0111022`, 2001.

[24] В. Н. Сорокин. О линейной независимости значений обобщенных полилогарифмов // Матем. сб. 2001. Т. 192. №8. С. 139–154.

[25] Е. А. Уланский. Тождества для обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2003. Т. 73. №4. С. 613–624.

[26] Д. В. Васильев. Некоторые формулы для дзета-функции в целых точках // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1996. №1. С. 81–84.

[27] M. Waldschmidt. Valeurs zêta multiples: une introduction // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2000. V. 12. №2. P. 581–595.

[28] M. Waldschmidt. Multiple polylogarithms // Lectures at Institute of Math. Sciences (Chennai, November 2000); Updated version // `http://www.math.jussieu.fr/~miw/articles/ps/mpl.ps`.
[29] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа. Т. 2. М.: Физматлит, 1963.
[30] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications // First European Congress of Mathematics (Paris, 1992). V. II / ed. A. Joseph et al. Progr. Math. V. 120. Boston: Birkhäuser, 1994. P. 497–512.
[31] J. Zhao. Analytic continuation of multiple zeta functions // Proc. Amer. Math. Soc. 2000. V. 128. № 5. P. 1275–1283.
[32] С. А. Злобин. Интегралы, представляемые в виде линейных форм от обобщенных полилогарифмов // Матем. заметки. 2002. Т. 71. № 5. С. 782–787.
[33] В. В. Зудилин. Совершенно уравновешенные гипергеометрические ряды и кратные интегралы // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 177–178.
[34] В. В. Зудилин. О диофантовых задачах для q-дзета-значений // Матем. заметки. 2002. Т. 72. № 6. С. 936–940.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступила в редакцию
30.10.2001