УДК 511.36

В. В. Зудилин

Об оценках снизу многочленов от значений некоторых целых функций

В работе установлены оценки снизу многочленов и линейных форм от значений E-функций в рациональной точке, зависящие от всех коэффициентов. Приведены следствия для обобщенных гипергеометрических E-функций.

Библиография: 9 названий.

Введение

История вопроса. Важным направлением теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел является исследование поведения величины

$$|h_1\xi_1+\dots+h_m\xi_m|, \qquad h_j\in\mathbb{Z}, \quad j=1,\dots,m, \tag{0.1}$$

для заданных действительных $\xi_1,\dots,\xi_m$, $m\geqslant 1$, и ее оценка снизу в зависимости от целых $h_1,\dots,h_m$. Как следует из теоремы Дирихле (см., например, [1, гл. 1, § 2, теорема 4]) *для любого действительного $H\geqslant 1$ существуют целые числа $h_1,\dots,h_m$ такие, что*

$$|h_1\xi_1+\dots+h_m\xi_m|<H^{-m+1}, \qquad 0<\max_{1\leqslant j\leqslant m}\bigl\{|h_j|\bigr\}\leqslant H.$$

Тем самым, теорема Дирихле отвечает на вопрос, сколь малым может быть величина (0.1) в зависимости от

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m}\bigl\{|h_j|\bigr\}.$$

При этом абсолютно не учитывается структура чисел $\xi_1,\dots,\xi_m$. Из метрических соображений [2, гл. I, теорема 12] следует, что *при любом $\varepsilon>0$ для почти всех (в смысле меры Лебега) точек $\bar\xi=(\xi_1,\dots,\xi_m)\in\mathbb{R}^m$ существует постоянная $C=C(\bar\xi,\varepsilon)>0$ такая, что для произвольных целых $h_1,\dots,h_m$, не равных нулю одновременно, справедливо неравенство*

$$|h_1\xi_1+\dots+h_m\xi_m|>C(H_1\cdots H_m)^{-1}H(\log H)^{-m+1-\varepsilon},$$

где

$$H_j=\max\bigl\{1,|h_j|\bigr\}, \quad j=1,\dots,m, \qquad H=\max\Bigl\{e,\max_{1\leqslant j\leqslant m}\{H_j\}\Bigr\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00181).

Однако, в настоящее время не известно ни одного набора чисел $\bar{\xi}$, для которого выполнялось бы такое неравенство.

Методы теории трансцендентных чисел позволяют при специальном выборе $\bar{\xi}$ получать оценки снизу величины (0.1) вида

$$|h_1\xi_1 + \dots + h_m\xi_m| > CH^{-m+1-\varepsilon}.$$

В то же время, в ряде работ, связанных, например, с оценками отклонения равномерно распределенных последовательностей, возникает необходимость в оценках снизу модулей линейных форм (0.1), причем оценках, зависящих от всех коэффициентов. Впервые, по всей видимости, подобный результат был получен А. Бейкером для значений экспоненты [3]:

$$|h_1e^{\alpha_1} + \dots + h_me^{\alpha_m}| > C(H_1 \cdots H_m)H^{1-\gamma/\sqrt{\log\log H}}.$$

Для этих целей он несколько уточнил метод, предложенный К. Л. Зигелем [4], но серьезного обобщения схема Бейкера так и не получила (попытка сделать это содержится в работе [5]).

Задача оценки снизу линейных форм от действительных чисел может быть естественным образом обобщена. Именно, можно исследовать поведение величины

$$|P(\xi_1, \dots, \xi_m)|, \qquad P \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m], \tag{0.2}$$

в зависимости от коэффициентов многочлена $P(y_1, \dots, y_m)$ (например, его высоты $H = H(P)$) и его степени $d = \deg P$.

Упомянутый выше метод Зигеля позволяет проводить эти исследования в случае, когда в качестве чисел $\xi_1, \dots, \xi_m$ рассматриваются значения в алгебраической точке $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ аналитических функций

$$f_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} f_{j,\nu}z^\nu, \qquad f_{j,\nu} \in \mathbb{K}, \quad j = 1, \dots, m, \quad \nu \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{0.3}$$

составляющих в совокупности решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \frac{d}{dz}y_l = \sum_{j=1}^{m} Q_{lj}y_j, \qquad l = 1, \dots, m, \\ Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \qquad l, j = 1, \dots, m, \end{gathered} \tag{0.4}$$

первого порядка. При этом коэффициенты в рядах Тейлора функций (0.3) удовлетворяют некоторым дополнительным арифметическим условиям, определяющим класс E-функций, и точка α не является особой точкой системы (0.4). Метод Зигеля был существенно усилен в работах А. Б. Шидловского, который, в частности, доказал критерий алгебраической независимости значений E-функций. Подробную историю этого вопроса можно найти в его монографии [1]. Сразу отметим, что в дальнейшем будет рассматриваться только случай $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, поскольку все оценки, полученные в нем, имеют свои естественные аналоги для произвольного конечного расширения поля рациональных чисел.

Определение [6]. Функция

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{f_\nu}{\nu!}z^\nu,\qquad f_\nu\in\mathbb{Q},\quad \nu\in\mathbb{Z}^+,$$

называется E-*функцией*, если для некоторой положительной константы C справедливо неравенство $|f_\nu|<C^{\nu+1}$ при $\nu\in\mathbb{Z}^+$ и существует последовательность натуральных чисел $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $\varphi_n f_\nu\in\mathbb{Z}$, $\nu=0,1,\dots,n$, $n\in\mathbb{N}$, и $\varphi_n<C^n$ при $n\in\mathbb{N}$.

Данное определение несколько отличается от классического определения Зигеля. Однако, все известные E-функции (в смысле Зигеля) с рациональными коэффициентами рядов Тейлора, являющиеся решениями линейных дифференциальных уравнений, удовлетворяют этому определению. В частности, это относится ко всем целым гипергеометрическим функциям с рациональными параметрами (см. [1, гл. 5, § 1]).

В 1984 году Г. В. Чудновский [7] предложил оригинальную конструкцию, позволяющую получать оценки снизу линейных форм от значений E-функций (0.3), каждая из которых удовлетворяет своему линейному однородному дифференциальному уравнению произвольного порядка:

$$|h_1f_1(\alpha)+\dots+h_mf_m(\alpha)|>C(H_1\cdots H_m)^{-1}H^{1-\varepsilon}.$$

При этом на совокупность этих уравнений накладывалось очень жесткое ограничительное условие, схожее с условием Зигеля. Кроме этого, Чудновскому не удалось корректно осуществить переход от линейных приближающих функциональных форм, названных им *градуированными приближениями Паде*, к линейным числовым формам. В целом, метод Чудновского являлся непосредственным развитием метода Зигеля–Шидловского. Дальнейшая реализация конструкции градуированных приближений Паде в работе [8] привела к доказательству точных по порядку оценок меры иррациональности значений E-функций (0.3):

$$\left|f_l(\alpha)-\frac{p}{q}\right|>|q|^{-2-\gamma(\log\log|q|)^{-1/(m+1)}},\qquad l=1,\dots,m,$$

с легко проверяемым условием на совокупность рассматриваемых функций.

В настоящей работе с помощью новых идей в методе Зигеля–Шидловского конструкция градуированных приближений Паде реализована в полном объеме для получения оценок снизу величин (0.1) и (0.2). При этом условие, накладываемое на совокупность рассматриваемых функций, является более простым по сравнению с условием Чудновского и во многих случаях проверено. Это позволяет получить следствия для конкретных обобщенных гипергеометрических функций.

Основные результаты. Будем говорить, что *система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка* (0.4) *лежит в классе* $\mathbf{W}^0$, если функции, входящие в некоторую фундаментальную матрицу решений $(\psi_{jl})_{j,l=1,\dots,m}$ системы (0.4), однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Отметим, что в этом случае "некоторую фундаментальную матрицу решений" можно заменить на "произвольную фундаментальную матрицу решений", поскольку все такие матрицы отличаются матричным множителем с постоянными коэффициентами.

Теорема I. *Пусть совокупность E-функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m\geqslant 2$, удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений* (0.4) *из класса $\mathbf{W}^0$, $\alpha\in\mathbb{Q}\backslash\{0\}$ – неособая точка этой системы и $d\in\mathbb{N}$. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma=\gamma(f_1,\dots,f_m;\alpha,d)$ и $C=C(f_1,\dots,f_m;\alpha,d)$ такие, что для любого однородного многочлена $P\in\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_m]$ степени d выполняется неравенство*

$$\bigl|P\bigl(f_1(\alpha),\dots,f_m(\alpha)\bigr)\bigr|>C\cdot|h_1\cdots h_w|^{-1}H^{1-\gamma(\log\log H)^{-1/(m^2-m+2)}},\qquad H=\max_{1\leqslant i\leqslant w}\bigl\{|h_i|\bigr\}\geqslant 3,$$

где $h_1,\dots,h_w$ – все ненулевые коэффициенты многочлена $P(y_1,\dots,y_m)$.

Из теоремы I непосредственно вытекает результат об оценке снизу линейных форм от значений E-функций.

Следствие. *Пусть совокупность E-функций $f_1(z),\dots,f_m(z)$, $m\geqslant 2$, удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений* (0.4) *из класса $\mathbf{W}^0$, $\alpha\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ – неособая точка этой системы. Тогда существуют положительные постоянные $\gamma=\gamma(f_1,\dots,f_m;\alpha)$ и $C=C(f_1,\dots,f_m;\alpha)$ такие, что*

$$|h_1f_1(\alpha)+\dots+h_mf_m(\alpha)|>C\cdot(H_1\cdots H_m)^{-1}H^{1-\gamma(\log\log H)^{-1/(m^2-m+2)}},$$
$$h_i\in\mathbb{Z},\quad H_i=\max\bigl\{1,|h_i|\bigr\},\quad i=1,\dots,m,\qquad H=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{H_i\}\geqslant 3.$$

На самом деле, теорема I является частным случаем некоторого более общего утверждения, которое и будет доказываться ниже. Для его формулировки нам понадобится дополнительное понятие. В дальнейшем будет рассматриваться система линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка, распадающаяся на m подсистем:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dz}y_{il}=\sum_{j=1}^{m_i}Q_{lj}^{(i)}y_{ij},\qquad l=1,\dots,m_i,\\&Q_{lj}^{(i)}=Q_{lj}^{(i)}(z)\in\mathbb{Q}(z),\qquad l,j=1,\dots,m_i,\end{aligned}\right.\qquad i=1,\dots,m,\quad m\geqslant 2. \tag{0.5}$$

Если $\alpha\in\mathbb{C}$ – неособая точка системы (0.5), то она является неособой точкой и для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}a_{ij}=-\sum_{l=1}^{m_i}Q_{lj}^{(i)}a_{il},\qquad j=1,\dots,m_i,\quad i=1,\dots,m, \tag{0.6}$$

сопряженной к системе (0.5). Поэтому существует набор аналитических в некоторой окрестности точки $z=\alpha$ функций

$$\varphi_{ij}=\varphi_{ij}(z),\qquad j=1,\dots,m_i,\quad i=1,\dots,m, \tag{0.7}$$

удовлетворяющих системе (0.6), такой, что

$$\varphi_{ij}(\alpha)=\begin{cases}1&\text{при } j=1,\\0&\text{при } j=2,\dots,m_i,\end{cases}\qquad i=1,\dots,m. \tag{0.8}$$

Если функции (0.7) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, то будем говорить, что *система* (0.5) *принадлежит классу* $\mathbf{W}^0(\alpha)$.

ТЕОРЕМА II. *Пусть совокупность E-функций*

$$f_{il}(z), \qquad l = 1, \dots, m_i, \quad i = 1, \dots, m, \tag{0.9}$$

удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений (0.5) *из класса* $\mathbf{W}^0(\alpha)$. *Для произвольного однородного многочлена* $P = P(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_m]$ *степени* $d \in \mathbb{N}$ *введем множество мультииндексов* U *таким образом, что*

$$\begin{gathered} P(y_1, \dots, y_m) = \sum_{\bar{u} \in U} h_{\bar{u}} y_1^{u_1} \cdots y_m^{u_m}, \\ h_{\bar{u}} \neq 0, \qquad |\bar{u}| = u_1 + \dots + u_m = d, \qquad \bar{u} \in U; \end{gathered} \tag{0.10}$$

при этом функции

$$F_{\bar{u}}(z) = f_{11}^{u_1}(z) f_{21}^{u_2}(z) \cdots f_{m1}^{u_m}(z), \qquad \bar{u} \in U, \tag{0.11}$$

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. *Тогда существуют положительные постоянные* γ *и* C, *зависящие только от совокупности функций* (0.9), *числа* d *и неособой точки* $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, *такие, что справедливо неравенство*

$$\begin{gathered} \bigl|P\bigl(f_{11}(\alpha), f_{21}(\alpha), \dots, f_{m1}(\alpha)\bigr)\bigr| > C \prod_{\bar{u} \in U} |h_{\bar{u}}|^{-1} H^{1 - \gamma (\log\log H)^{-1/(m_1 + \dots + m_m - m + 2)}}, \\ H = \max_{\bar{u} \in U} \bigl\{ |h_{\bar{u}}| \bigr\} \geqslant 3. \end{gathered}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Для совокупности функций $f_1(z), \dots, f_m(z)$ из теоремы I рассмотрим m “роллированых” копий

$$f_{il}(z) \equiv \begin{cases} f_{i-l+1}(z), & \text{если } i - l \geqslant 0, \\ f_{i-l+1+m}(z), & \text{если } i - l < 0, \end{cases} \qquad i, l = 1, \dots, m,$$

каждая из которых удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений, полученной из системы (0.4) некоторой перестановкой индексов. Отметим сразу, что поскольку исходные функции $f_1(z), \dots, f_m(z)$, входят в некоторую фундаментальную систему решений системы (0.4) из класса $\mathbf{W}^0$, они однородно алгебраически независимы над $C(z)$.

Пусть

$$\psi_{lj}(z), \qquad l, j = 1, \dots, m, \tag{0.12}$$

– элементы фундаментальной матрицы решений системы (0.4), превращающейся в единичную матрицу в точке $z = \alpha$:

$$\psi_{lj}(\alpha) = \delta_{lj}, \qquad l, j = 1, \dots, m. \tag{0.13}$$

При этом функции (0.12) однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, поскольку система (0.4) лежит в классе $\mathbf{W}^0$. Тогда элементы обратной матрицы

$$\big(\widetilde{\psi}_{lj}(z)\big)_{l,j=1,\dots,m} = \big(\psi_{lj}(z)\big)^{-1}_{l,j=1,\dots,m},$$

как рациональные функции от (0.12), также однородно алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$, и, кроме того, согласно (0.13) для них выполнены условия нормировки в точке $z=\alpha$:

$$\widetilde{\psi}_{lj}(\alpha) = \delta_{lj}, \qquad l,j = 1,\dots,m.$$

Остается заметить, что однородно алгебраически независимые над $\mathbb{C}(z)$ функции

$$\varphi_{ij}(z) = \begin{cases} \widetilde{\psi}_{i,j+i-1}, & \text{если } j+i-1 \leqslant m, \\ \widetilde{\psi}_{i,j+i-1-m}, & \text{если } j+i-1 > m, \end{cases} \qquad i,j = 1,\dots,m,$$

удовлетворяют совокупности сопряженных систем и условиям (0.8), т.е. система для функций (0.9) лежит в классе $\mathbf{W}^0(\alpha)$. Функции (0.11) линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$ ввиду алгебраической независимости функций $f_i(z) \equiv f_{i1}(z)$, $i=1,\dots,m$. Для завершения доказательства теоремы I применим теорему II.

Приложения. В качестве иллюстрации применения теоремы II мы воспользуемся классическим результатом Зигеля [4] для значений функции

$$K_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!(\lambda+1)_\nu}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2\nu}, \qquad \lambda \in \mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\},$$
$$(\lambda+1)_0 = 1, \qquad (\lambda+1)_\nu = (\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu), \quad \nu = 1,2,\dots,$$

удовлетворяющей линейному однородному уравнению второго порядка

$$y'' + \frac{2\lambda+1}{z}y' + y = 0.$$

Теорема III. *Пусть*

$$\lambda_i \in \mathbb{Q}\setminus\{-1,-2,\dots\}, \qquad \lambda_i \neq \frac{2\mu-1}{2}, \quad \mu\in\mathbb{Z}, \qquad i=1,\dots,m,$$
$$\lambda_{i_1} \pm \lambda_{i_2} \notin \mathbb{Z}, \qquad i_1,i_2 = 1,\dots,m, \quad i_1\neq i_2,$$
$$\xi_1,\dots,\xi_n \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}, \qquad \xi_{j_1}^2 \neq \xi_{j_2}^2, \qquad j_1,j_2=1,\dots,n, \quad j_1\neq j_2.$$

Тогда существуют положительные постоянные C и γ, зависящие только от параметров $\lambda_1,\dots,\lambda_m$, $\xi_1,\dots,\xi_n$ и натурального числа d, и обладающие следующим свойством: для произвольного (не обязательно однородного) многочлена P от переменных y_{ij}, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, имеющего целые коэффициенты и степень d, справедливо неравенство

$$\Big|P\big|_{y_{ij}=K_{\lambda_i}(\xi_j)}\Big| > C|\Pi|^{-1}H^{1-\gamma(\log\log H)^{-1/(mn+2)}},$$

где Π – произведение всех ненулевых коэффициентов многочлена P, $H\geqslant 3$ – его высота.

Доказательство. Функции $y_1 = K_\lambda(\xi z)$, $y_2 = K'_\lambda(\xi z)$ составляют решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi^2 & -\frac{2\lambda+1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая сопряженная система имеет вид

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \xi^2 \\ -1 & \frac{2\lambda+1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}. \tag{0.14}$$

Если $a_1(z), a_2(z)$ – любое решение системы (0.14), то функция $\varphi(z) = a_1(z/\xi^2)$ вместе со своей производной $\psi(z) = \varphi'(z) = a_2(z/\xi^2)$ составляет решение системы

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\xi^2} & \frac{2\lambda+1}{z} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

Такую функцию $\varphi(z)$ с условиями $\varphi(\xi^2) = a_1(1) = 1$, $\varphi'(\xi^2) = a_2(1) = 0$ обозначим через $\varphi_{\lambda,\xi}(z)$.

Воспользуемся теперь леммой 1 [1, гл. 9, §1]: при заданном в условии теоремы выборе параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \xi_1, \dots, \xi_n$ функции

$$\varphi_{\lambda_i,\xi_j}(z), \quad \varphi'_{\lambda_i,\xi_j}(z), \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. Но это означает, что система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют функции

$$f_0(z) = 1,\ f_{ij,1}(z) = K_{\lambda_i}(\xi_j z),\ f_{ij,2}(z) = K'_{\lambda_i}(\xi_j z), \qquad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,$$

лежит в классе $\mathbf{W}^0(\alpha)$. Для завершения доказательства теоремы III применим теорему II.

Замечание. Условие принадлежности системы (0.6) классу $\mathbf{W}^0(\alpha)$ для заданной неособой точки $z = \alpha$ слабее условия нормальности Зигеля для этой системы.

§1. Вспомогательные утверждения

Ранг числовых линейных форм специального вида. Обозначим через $\mathbb{M}$ модуль линейных форм от переменных $y_1, \dots, y_m$ над кольцом $\mathbb{C}[z]$. Таким образом, элементы $R \in \mathbb{M}$ имеют вид

$$R = \sum_{k=1}^{m} P_k(z) y_k, \qquad P_k(z) \in \mathbb{C}[z], \quad k = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y'_l = \sum_{j=1}^{m} Q_{lj} y_j, \qquad Q_{lj} = Q_{lj}(z) \in \mathbb{C}(z), \quad l, j = 1, \dots, m. \tag{1.1}$$

Выберем многочлен $T=T(z)$ для системы (1.1) таким образом, что $TQ_{lj}\in\mathbb{C}[z]$, $l,j=1,\dots,m$.

Определим на $\mathbb{M}$ дифференциальный оператор

$$D=\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{l=1}^{m}\biggl(\sum_{j=1}^{m}Q_{lj}y_j\biggr)\frac{\partial}{\partial y_l}, \tag{1.2}$$

связанный с системой дифференциальных уравнений (1.1). Если $R\in\mathbb{M}$, то очевидно, что и $TDR\in\mathbb{M}$. Следовательно, $TD\colon\mathbb{M}\to\mathbb{M}$. Кроме того [1, гл. 3, §4], если $y_1,\dots,y_m$ есть произвольное решение системы (1.1), то

$$DR=\frac{d}{dz}R=R'.$$

Рассмотрим произвольную линейную форму из $\mathbb{M}$

$$R^{[0]}=\sum_{k=1}^{m}P_k^{[0]}(z)y_k,\qquad P_k^{[0]}(z)\in\mathbb{C}[z],\quad k=1,\dots,m, \tag{1.3}$$

и положим

$$R^{[n+1]}=TDR^{[n]},\qquad n\geqslant 0. \tag{1.4}$$

Пользуясь приведенным выше рассуждением, убеждаемся в том, что $R^{[n]}\in\mathbb{M}$, $n\geqslant 1$, иными словами,

$$R^{[n]}=\sum_{k=1}^{m}P_k^{[n]}(z)y_k,\qquad P_k^{[n]}(z)\in\mathbb{C}[z],\qquad n\geqslant 0,\quad k=1,\dots,m.$$

С помощью определения (1.2) оператора D и равенства (1.4) находим следующие рекуррентные формулы:

$$P_k^{[n+1]}(z)=T(z)\biggl(\frac{d}{dz}P_k^{[n]}(z)+\sum_{l=1}^{m}P_l^{[n]}(z)Q_{lk}(z)\biggr),\qquad n\geqslant 0,\quad k=1,\dots,m. \tag{1.5}$$

Будем пользоваться обозначением $\Omega=\{1,\dots,m\}$.

В этом пункте мы докажем следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Пусть для заданной линейной формы* (1.3) *из* $\mathbb{M}$ *ранг над* $\mathbb{C}(z)$ *квадратной матрицы*

$$\bigl(P_k^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,m-1;\,k\in\Omega}, \tag{1.6}$$

где входящие в нее многочлены определяются согласно формулам (1.5), *равен в точности* $\widetilde{m}$. *Для произвольного подмножества* $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}=\widetilde{m}$, *положим*

$$\Delta(\widetilde{\Omega};z)=\det\bigl(P_k^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}-1;\,k\in\widetilde{\Omega}}.$$

Пусть $\alpha\in\mathbb{C}$ – *неособая точка системы* (1.1), *т.е.* $T(\alpha)\neq 0$, *и известно, что*

$$\max_{\widetilde{\Omega}}\Bigl\{\operatorname*{ord}_{z=\alpha}\Delta(\widetilde{\Omega};z)\Bigr\}=q,$$

где максимум берется по всевозможным множествам $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}=\widetilde{m}$, *для которых* $\Delta(\widetilde{\Omega};z)\not\equiv 0$. *Тогда ранг над* $\mathbb{C}$ *числовой матрицы*

$$\bigl(P_k^{[n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}+q-1;\,k\in\Omega}$$

равен в точности $\widetilde{m}$.

Замечание. На самом деле, в дальнейшем понадобится не сформулированное утверждение, а только механизм его доказательства. Несмотря на это, предложение 1.1 представляется нам содержательным и весьма полезным как обобщение одной леммы Зигеля (см. [1, гл. 3, § 7, лемма 10]).

Доказательство. Согласно лемме 7 [1, гл. 3, § 4] фундаментальную систему решений

$$\bigl(y_{k\eta}(z)\bigr)_{k\in\Omega;\eta=1,\dots,m} \tag{1.7}$$

для (1.1) можно выбрать таким образом, что формы $R^{[0]}, R^{[1]}, R^{[2]}, \dots$ обращаются в нуль при подстановке в них вместо переменных $y_1, \dots, y_m$ каждого из $m-\widetilde{m}$ решений $y_{1\eta}, \dots, y_{m\eta}$, $\eta=\widetilde{m}+1, \dots, m$. Отметим сразу, что все функции, входящие в матрицу (1.7), аналитичны в точке $z=\alpha$, поскольку она не является особой точкой системы (1.1).

Для результата подстановки функций $y_{1\eta}, \dots, y_{m\eta}$, $\eta=1, \dots, m$, вместо переменных $y_1, \dots, y_m$ в форму $R^{[n]}\in\mathbb{M}$ введем обозначение

$$R_\eta^{[n]}=R_\eta^{[n]}(z)=\sum_{k\in\Omega}P_k^{[n]}(z)y_{k\eta}(z), \qquad n\geqslant 0, \quad \eta=1,\dots,\omega. \tag{1.8}$$

Тогда согласно выбору матрицы (1.7)

$$R_\eta^{[n]}(z)\equiv 0, \qquad n\geqslant 0, \quad \eta=\widetilde{m}+1,\dots,m. \tag{1.9}$$

Введем в рассмотрение следующие функции, аналитичные в точке $z=\alpha$:

$$\Lambda(z)=\det\bigl(y_{k\eta}(z)\bigr)_{k\in\Omega;\eta=1,\dots,m},$$
$$\lambda(\widetilde{\Omega};z)=\det\bigl(y_{k\eta}(z)\bigr)_{k\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega};\eta=\widetilde{m}+1,\dots,m}, \qquad \widetilde{\Omega}\subset\Omega, \quad \operatorname{Card}\widetilde{\Omega}=\widetilde{m}$$

(в случае $\widetilde{m}=m$ считаем $\lambda(\Omega;z)\equiv 1$).

Лемма 1.2. *Пусть $\mathscr{N}$ – произвольное подмножество $\mathbb{Z}^+=\{0,1,2,\dots\}$ такое, что $\operatorname{Card}\mathscr{N}=\widetilde{m}$, и $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}=\widetilde{m}$. Тогда справедливо тождество*

$$\det\bigl(P_k^{[n]}(z)\bigr)_{n\in\mathscr{N};k\in\widetilde{\Omega}}\cdot\Lambda(z)=\det\bigl(R_\eta^{[n]}(z)\bigr)_{n\in\mathscr{N};\eta=1,\dots,\widetilde{m}}\cdot\lambda(\widetilde{\Omega};z). \tag{1.10}$$

Доказательство. По правилу умножения матриц и согласно обозначениям (1.8) имеем

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}P_k^{[n]}(z)\\ \delta_{ik}\end{pmatrix}_{n\in\mathscr{N},i\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega};k\in\Omega}\bigl(y_{k\eta}(z)\bigr)_{k\in\Omega;\eta=1,\dots,m}\\ &\qquad=\begin{pmatrix}R_\eta^{[n]}(z)\\ y_{i\eta}(z)\end{pmatrix}_{n\in\mathscr{N},i\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega};\eta=1,\dots,m},\end{aligned} \tag{1.11}$$

где через δ_{ik} обозначен символ Кронекера. Ввиду равенств (1.9) находим

$$\det\begin{pmatrix} R_\eta^{[n]}(z) \\ y_{i\eta}(z) \end{pmatrix}_{n\in\mathscr{N},i\in\Omega\setminus\widetilde\Omega;\eta=1,\dots,m} \\ = \det\bigl(R_\eta^{[n]}(z)\bigr)_{n\in\mathscr{N};\eta=1,\dots,\widetilde m}\cdot\det\bigl(y_{i\eta}(z)\bigr)_{i\in\Omega\setminus\widetilde\Omega;\eta=\widetilde m+1,\dots,m},$$

а кроме того,

$$\det\begin{pmatrix} P_k^{[n]}(z) \\ \delta_{ik} \end{pmatrix}_{n\in\mathscr{N},i\in\Omega\setminus\widetilde\Omega;k\in\Omega} = \det\bigl(P_k^{[n]}(z)\bigr)_{n\in\mathscr{N};k\in\widetilde\Omega}.$$

Поэтому после перехода от матриц к определителям равенство (1.11) примет вид (1.10).

Лемма 1.3. *Если для* $\widetilde\Omega\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde\Omega=\widetilde m$, *выполнено* $\lambda(\widetilde\Omega;\alpha)\ne0$, *то* $\Delta(\widetilde\Omega;z)\not\equiv0$. *Если при этом*

$$\operatorname*{ord}_{z=\alpha}\Delta(\widetilde\Omega;z)=p,$$

то ранг числовой матрицы

$$\bigl(P_k^{[n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde m+p-1;k\in\widetilde\Omega} \tag{1.12}$$

равен $\widetilde m$.

Доказательство. В случае $\mathscr{N}=\{0,1,\dots\widetilde m-1\}$ согласно тождеству леммы 1.2 имеем

$$\Delta(\widetilde\Omega;z)\cdot\Lambda(z)=\det\bigl(R_\eta^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde m-1;\eta=1,\dots,\widetilde m}\cdot\lambda(\widetilde\Omega;z). \tag{1.13}$$

Если предположить, что $\lambda(\widetilde\Omega;z)\not\equiv0$ и в то же время $\Delta(\widetilde\Omega;z)\equiv0$, то получим, что $\det\bigl(R_\eta^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde m-1;\eta=1,\dots,\widetilde m}\equiv0$. Отсюда и из равенства (1.13) заключаем, что $\Delta(\widetilde\Omega;z)\equiv0$ для любого множества $\widetilde\Omega\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde\Omega=\widetilde m$, иными словами, что ранг матрицы

$$\bigl(P_k^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde m-1;k\in\Omega} \tag{1.14}$$

меньше $\widetilde m$. С другой стороны, ранг матрицы (1.6) равен $\widetilde m$ и по лемме 6 [1, гл. 3, § 4] ранг матрицы (1.14) также равен $\widetilde m$. Полученное противоречие означает, что в случае $\lambda(\widetilde\Omega;z)\not\equiv0$ имеем $\Delta(\widetilde\Omega;z)\not\equiv0$.

Перейдем к доказательству второй части леммы. Для заданного множества $\widetilde\Omega$ положим $\Delta(z)=\Delta(\widetilde\Omega;z)$ и перепишем равенство (1.13) в виде

$$\Delta(z)\cdot\chi(z)=\det\bigl(R_\eta^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde m-1;\eta=1,\dots,\widetilde m}, \tag{1.15}$$

где $\chi(z) = \Lambda(z)/\lambda(\widetilde{\Omega}; z)$ – аналитическая в точке $z = \alpha$ функция, поскольку $\lambda(\widetilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$. Перепишем формулы (1.4) для функций (1.8):

$$R_\eta^{[n+1]}(z) = T(z)\frac{d}{dz}R_\eta^{[n]}(z), \qquad n \geqslant 0, \quad \eta = 1, \dots, \widetilde{m}. \tag{1.16}$$

Пользуясь соотношениями (1.15), (1.16), правилом дифференцирования определителя по строкам и тождеством леммы 1.2, получаем

$$\begin{aligned}\Bigl(T(z)\frac{d}{dz}\Bigr)^p \bigl(\Delta(z)\chi(z)\bigr) &= \Bigl(T(z)\frac{d}{dz}\Bigr)^p \det\bigl(R_\eta^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}-1;\eta=1,\dots,\widetilde{m}} \\ &= \sum_{\substack{\nu_0+\dots+\nu_{\widetilde{m}-1}=p \\ \nu_0,\dots,\nu_{\widetilde{m}-1}\geqslant 0}} \frac{p!}{\nu_0!\cdots\nu_{\widetilde{m}-1}!}\det\bigl(R_\eta^{[n+\nu_n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}-1;\eta=1,\dots,\widetilde{m}} \\ &= \sum_{\substack{\nu_0+\dots+\nu_{\widetilde{m}-1}=p \\ \nu_0,\dots,\nu_{\widetilde{m}-1}\geqslant 0}} \frac{p!}{\nu_0!\cdots\nu_{\widetilde{m}-1}!}\det\bigl(P_k^{[n+\nu_n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}-1;k\in\widetilde{\Omega}}\cdot\chi(z). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Отметим, что последнее тождество в случае $\widetilde{m} = m$ было доказано в дипломной работе В. В. Титенко в 1987 году. Функция $\chi(z)$ в точке $z = \alpha$ аналитична и принимает ненулевое значение; по условию $T(\alpha) \neq 0$. Поэтому, если p – точный порядок нуля в точке $z = \alpha$ многочлена $\Delta(z)$, то подстановка $z = \alpha$ в тождество (1.17) с последующим делением обеих частей на $\chi(\alpha)$ даст соотношение

$$0 \neq T^p(\alpha)\Delta^{(p)}(\alpha) = \sum_{\substack{\nu_0+\dots+\nu_{\widetilde{m}-1}=p \\ \nu_0,\dots,\nu_{\widetilde{m}-1}\geqslant 0}} \frac{p!}{\nu_0!\cdots\nu_{\widetilde{m}-1}!}\det\bigl(P_k^{[n+\nu_n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}-1;k\in\widetilde{\Omega}}.$$

Отсюда следует, что для некоторого набора $\nu_0, \dots, \nu_{\widetilde{m}-1}$, $\nu_0 + \dots + \nu_{\widetilde{m}-1} = p$, неотрицательных целых чисел выполнено

$$\det\bigl(P_k^{[n+\nu_n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{m}-1;k\in\widetilde{\Omega}} \neq 0,$$

а это, в свою очередь, означает, что ранг числовой матрицы (1.12) в точности равен $\widetilde{m}$.

Вернемся теперь к доказательству предложения 1.1.

Если предположить, что для любого множества $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega} = \widetilde{m}$, выполнено $\lambda(\widetilde{\Omega}; \alpha) = 0$, то согласно определению миноров $\lambda(\widetilde{\Omega}; z)$ столбцы числовой матрицы $\bigl(y_{k\eta}(\alpha)\bigr)_{k\in\widetilde{\Omega};\eta=\widetilde{m}+1,\dots,m}$ линейно зависимы. Это, однако, противоречит тому, что матрица (1.7) является фундаментальной матрицей решений системы (1.1), для которой точка $z = \alpha$ является неособой. Поэтому $\lambda(\widetilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$, по крайней мере, для одного такого $\widetilde{\Omega}$. Остается воспользоваться леммой 1.3 и тем фактом, что $p \leqslant q$.

Лемма Галочкина. Излагаемое ниже утверждение является одним из ключевых моментов описываемого в работе метода. Его любезно предоставил автору А. И. Галочкин.

Лемма 1.4 (А. И. Галочкин). *Пусть*

$$\Delta(z)=\sum_{\nu=p}^{s}\frac{\Delta_\nu}{\nu!}z^\nu, \qquad \Delta_\nu\in\mathbb{Z}, \quad |\Delta_\nu|\leqslant\delta, \quad \nu=p,p+1,\dots,s,$$

$$s=\deg\Delta(z), \quad p=\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta(z)\geqslant 2, \quad q=\operatorname*{ord}_{z=\alpha}\Delta(z), \quad \alpha\in\mathbb{C}, \quad |\alpha|\leqslant\frac{p-\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}.$$

Тогда

$$q\leqslant\frac{2\log(s\delta)}{\log p}. \tag{1.18}$$

Доказательство. При $|\xi|=p$ имеем

$$|\Delta(\xi)|\leqslant(s-p+1)\frac{\delta}{p!}p^p,$$

где использовано неравенство

$$\frac{p^\nu}{\nu!}\leqslant\frac{p^p}{p!} \quad \text{при} \quad \nu\geqslant p.$$

Поскольку

$$\Delta(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\xi|=p}\frac{z^p(z-\alpha)^q}{\xi^p(\xi-\alpha)^q}\,\frac{\Delta(\xi)}{\xi-z}\,d\xi,$$

а также

$$\frac{s-p+1}{p-1}\leqslant\frac{s}{p},$$

при $|z|=1$ получаем

$$\begin{aligned}|\Delta(z)|&\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint_{|\xi|=p}\frac{(1+|\alpha|)^q}{p^p(p-|\alpha|)^q}\,\frac{s-p+1}{p-1}\,\frac{\delta}{p!}p^p\,d\xi\leqslant s\delta\left(\frac{1+|\alpha|}{p-|\alpha|}\right)^q\frac{1}{p!}\\&\leqslant s\delta\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)^q\frac{1}{p!}.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\Delta_p=\frac{p!}{2\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{\Delta(z)}{z^{p+1}}\,dz,$$

откуда

$$|\Delta_p|\leqslant p!\cdot\max_{|z|=1}|\Delta(z)|\leqslant s\delta p^{-q/2}.$$

С другой стороны, число Δ_p является целым и отлично от нуля, т.е. $|\Delta_p|\geqslant 1$, откуда

$$p^{q/2}\leqslant s\delta,$$

что после логарифмирования дает неравенство (1.18). Лемма доказана.

Представление функции $g(z)$ в виде степенного ряда

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{g_\nu}{\nu!} z^\nu, \qquad g_\nu \in \mathbb{C}, \tag{1.19}$$

назовем *нормальным разложением функции*, а числа g_ν, $\nu \in \mathbb{Z}^+$, – *коэффициентами в нормальном разложении функции*. Если при этом функция $g(z)$ является многочленом, т.е. степенной ряд (1.19) содержит лишь конечное количество слагаемых, то будем полагать

$$\|g(z)\| = \max_\nu \{|g_\nu|\}.$$

Лемма 1.5 [8]. *Для многочлена $g(z)$ справедливы следующие неравенства*:

а) $\|g'(z)\| \leqslant \|g(z)\|$;

б) $\|g_1(z) + g_2(z)\| \leqslant \|g_1(z)\| + \|g_2(z)\|$;

в) $\|g_1(z)g_2(z)\| \leqslant \binom{\deg g_1(z) + \deg g_2(z)}{\deg g_1(z)} \|g_1(z)\| \cdot \|g_2(z)\|$.

Приведем теперь необходимое в дальнейшем следствие из леммы 1.4.

Лемма 1.6. *Пусть для функции*

$$\Delta(z) = \det\bigl(P_{nk}(z)\bigr)_{n,k=1,\dots,\widetilde{m}},$$

где многочлены $P_{nk}(z) \in \mathbb{C}[z]$ имеют целые коэффициенты в нормальном разложении и удовлетворяют условиям

$$\deg P_{nk}(z) \leqslant d, \quad \|P_{nk}(z)\| \leqslant H, \qquad n,k = 1,\dots,\widetilde{m},$$

известно, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta(z) \geqslant p,$$

число p достаточно велико, точка $z = \alpha$ фиксирована. Тогда

$$\operatorname*{ord}_{z=\alpha} \Delta(z) < \frac{2\widetilde{m}}{\log p}\bigl(\log H + 2d(1 + \log \widetilde{m})\bigr).$$

Доказательство. Раскрывая $\Delta(z)$ как определитель, по лемме 1.5 получим

$$\|\Delta(z)\| \leqslant \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_{\widetilde{m}}} \|P_{1\sigma(1)}(z)P_{2\sigma(2)}(z)\cdots P_{\widetilde{m}\sigma(\widetilde{m})}(z)\| \leqslant \widetilde{m}! \cdot \frac{(\widetilde{m}d)!}{(d!)^{\widetilde{m}}} \cdot H^{\widetilde{m}}$$
$$\leqslant \widetilde{m}^{\widetilde{m}} \cdot \frac{(\widetilde{m}d)^{\widetilde{m}d}}{(d/e)^{\widetilde{m}d}} \cdot H^{\widetilde{m}} = \widetilde{m}^{\widetilde{m}(d+1)} e^{\widetilde{m}d} H^{\widetilde{m}}.$$

Осталось воспользоваться леммой 1.4 и тем фактом, что $\deg \Delta(z) \leqslant \widetilde{m}d < e^{\widetilde{m}d}$:

$$\operatorname*{ord}_{z=\alpha} \Delta(z) \leqslant \frac{2\log(\deg \Delta(z) \cdot \|\Delta(z)\|)}{\log p} < \frac{2\log(\widetilde{m}^{\widetilde{m}(d+1)} e^{2\widetilde{m}d} H^{\widetilde{m}})}{\log p}$$
$$\leqslant \frac{2\widetilde{m}}{\log p}\bigl(\log H + 2d(1 + \log \widetilde{m})\bigr),$$

что и требовалось.

§ 2. Градуированные приближения Паде

Для доказательства теоремы II воспользуемся упомянутой выше конструкцией работы [7].

Обозначим через $T(z)$ наименьший общий знаменатель рациональных коэффициентов системы (0.5):

$$T(z) \in \mathbb{Z}[z], \quad T(z)Q_{lj}^{(i)}(z) \in \mathbb{Z}[z], \qquad l,j=1,\dots,m_i, \quad i=1,\dots,m. \tag{2.1}$$

Системы приближающих функциональных форм, строящиеся ниже, будут зависеть от натуральных параметров $M_{\bar u}$, $\bar u \in U$. Положим

$$\begin{gathered} M=\max_{\bar u\in U}\{M_{\bar u}\}, \qquad N=\bigl[(\log M)^{1/(m_1+m_2+\dots+m_m-m+2)}\bigr]>d, \\ \varepsilon=\sum_{\bar u\in U}\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{u_i}\frac{m_i-1}{N+m_i-v}\asymp\frac{1}{N}, \qquad \min_{\bar u\in U}\{M_{\bar u}\}\geqslant 3\varepsilon M, \end{gathered} \tag{2.2}$$

при этом будем считать M достаточно большим. (Здесь и далее квадратными скобками мы обозначаем целую часть числа.) Буквы C с нижними индексами и M со штрихами будем использовать для обозначения положительных постоянных, зависящих только от функций (0.9), системы (0.5), чисел α и d. Положим также $\bar a=(\bar a_1,\dots,\bar a_m)$, где $\bar a_i=(a_{i1},\dots,a_{im_i})$, $i=1,\dots,m$, и $\bar\kappa=(\bar\kappa_1,\dots,\bar\kappa_m)$ – мультииндекс, где $\bar\kappa_i=(\kappa_{i1},\dots,\kappa_{im_i})$, $i=1,\dots,m$, причем все компоненты κ_{ij} мультииндекса неотрицательны, а если в некоторой сумме встретилось слагаемое хотя бы с одной компонентой $\kappa_{ij}<0$, то считаем это слагаемое отсутствующим (равным нулю). Для экономии места в формулах будем писать

$$\bar a^{\bar\kappa}=\prod_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,m_i}}a_{ij}^{\kappa_{ij}}, \qquad |\bar\kappa_i|=\sum_{j=1}^{m_i}\kappa_{ij}, \quad i=1,\dots,m.$$

Введем множества

$$\begin{gathered} \Omega_{\bar u}=\Omega_{\bar u}(N)=\{\bar\kappa:|\bar\kappa_i|=N-u_i,\ i=1,\dots,m\}, \qquad \bar u\in U, \\ \Omega=\Omega(N)=\bigcup_{\bar u\in U}\Omega_{\bar u}, \qquad \Theta=\Theta(N)=\{\bar s:|\bar s_i|=N,\ i=1,\dots,m\}; \end{gathered}$$

соответствующими маленькими буквами обозначим количества элементов в них [1, гл. 2, § 7, лемма 7]:

$$\begin{gathered} \omega_{\bar u}=\operatorname{Card}\Omega_{\bar u}=\prod_{i=1}^{m}\binom{N+m_i-1-u_i}{m_i-1}, \qquad \bar u\in U, \\ \omega=\operatorname{Card}\Omega=\sum_{\bar u\in U}\omega_{\bar u}, \qquad \theta=\operatorname{Card}\Theta=\prod_{i=1}^{m}\binom{N+m_i-1}{m_i-1}. \end{gathered}$$

Искомые линейные формы имеют вид

$$R(z;\bar a)=\sum_{\bar u\in U}P_{\bar u}(z;\bar a)\prod_{i=1}^{m}\bigl(a_{i1}f_{i1}(z)+\dots+a_{im_i}f_{im_i}(z)\bigr)^{N-u_i}, \tag{2.3}$$

где многочлены $P_{\bar u}(z;\bar a)$ однородны по каждой компоненте $\bar a_i$, $i=1,\dots,m$, и имеют вид

$$P_{\bar u}(z;\bar a)=\sum_{\bar\kappa\in\Omega_{\bar u}}\bar a^{\bar\kappa}P_{\bar\kappa}(z),\qquad \bar u\in U. \tag{2.4}$$

Функциональную линейную форму (2.3) можно представить в виде

$$R(z;\bar a)=\sum_{\bar s\in\Theta}\bar a^{\bar s}R_{\bar s}(z), \tag{2.5}$$

где

$$R_{\bar s}(z)=\sum_{\bar u\in U}\sum_{\substack{\bar r=(\bar r_1,\dots,\bar r_m)\\ |\bar r_i|=u_i,\, i=1,\dots,m}}\prod_{i=1}^{m}\frac{u_i!}{r_{i1}!\cdots r_{im_i}!}P_{\bar s-\bar r}(z)\bar f^{\,\bar r}(z),\qquad \bar s\in\Theta. \tag{2.6}$$

Лемма 2.1. *Для натуральных $M_{\bar u}$, $\bar u\in U$, и выбранных согласно* (2.2) *чисел M, N и ε существуют многочлены $P_{\bar\kappa}(z)\in\mathbb{Q}[z]$, $\bar\kappa\in\Omega$, удовлетворяющие следующим условиям*:

1) *не все они тождественно равны нулю*;
2) $\deg P_{\bar\kappa}<M$ *для всех* $\bar\kappa\in\Omega$;
3) $\operatorname*{ord}_{z=0}P_{\bar\kappa}\geqslant M-M_{\bar u}$ *для всех* $\bar\kappa\in\Omega_{\bar u}$, $\bar u\in U$;
4) *коэффициенты в нормальном разложении этих многочленов являются целыми числами, ограниченными по модулю величиной* $C_0^{M/\varepsilon}$;
5) *порядок нуля в точке $z=0$ каждой из линейных функциональных форм* (2.6) *не ниже*

$$K=\biggl[\sum_{\bar u\in U}\frac{\omega_{\bar u}}{\theta}M_{\bar u}-\varepsilon M\biggr].$$

Доказательство этой леммы проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 1.1 [8].

Замечание 1. Имеем

$$\frac{\omega_{\bar u}}{\theta}=\prod_{i=1}^{m}\frac{\binom{N+m_i-1-u_i}{m_i-1}}{\binom{N+m_i-1}{m_i-1}}=\prod_{i=1}^{m}\frac{(N+m_i-1-u_i)!}{(N+m_i-1)!}\cdot\frac{N!}{(N-u_i)!}$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\frac{(N-u_i+1)\cdots(N-1)N}{(N+m_i-u_i)\cdots(N+m_i-2)(N+m_i-1)}$$
$$=\prod_{i=1}^{m}\prod_{v=1}^{u_i}\biggl(1-\frac{m_i-1}{N+m_i-v}\biggr)>1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{u_i}\frac{m_i-1}{N+m_i-v},\qquad \bar u\in U,$$

откуда

$$K=\left[\sum_{\bar u\in U}\frac{\omega_{\bar u}}{\theta}M_{\bar u}-\varepsilon M\right]=\left[\sum_{\bar u\in U}M_{\bar u}-\sum_{\bar u\in U}\left(1-\frac{\omega_{\bar u}}{\theta}\right)M_{\bar u}-\varepsilon M\right]$$
$$>\left[\sum_{\bar u\in U}M_{\bar u}-\sum_{\bar u\in U}\sum_{i=1}^{m}\sum_{v=1}^{u_i}\frac{m_i-1}{N+m_i-v}M-\varepsilon M\right]=\left[\sum_{\bar u\in U}M_{\bar u}-2\varepsilon M\right].$$

Последнее неравенство дает “более наглядное” представление величины K.

Замечание 2. В качестве дополнения к лемме 2.1 требует обоснования факт $R(z;\bar a)\not\equiv 0$ для построенной формы $R(z;\bar a)$. Среди всех мультииндексов $\bar s\in\Theta$ таких, что в наборе

$$P_{\bar s-\bar r}(z),\qquad |\bar r_i|=u_i,\quad i=1,\dots,m,$$

есть хотя бы один ненулевой многочлен, выберем $\bar s'$ с наибольшей возможной суммой $s'_{11}+s'_{21}+\dots+s'_{m1}$. Тогда

$$R_{\bar s'}(z)=\sum_{\bar u\in U}P_{\bar s'-u_1\bar e_{11}-u_2\bar e_{21}-\dots-u_m\bar e_{m1}}(z)f_{11}^{u_1}(z)f_{21}^{u_2}(z)\cdots f_{m1}^{u_m}(z)\not\equiv 0$$

ввиду линейной независимости функций (0.11) над $\mathbb{C}(z)$ и согласно выбору $\bar s'\in\Theta$. Отсюда и вытекает, что $R(z;\bar a)\not\equiv 0$. (Через $\bar e_{ij}$ мы обозначаем мультииндекс, у которого на месте с номером ij стоит единица, а на остальных местах – нули.)

Для размножения построенной согласно лемме 2.1 формы $R(z;\bar a)$ в формы того же вида введем линейный дифференциальный оператор

$$D=\frac{\partial}{\partial z}-\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m_i}\left(\sum_{l=1}^{m_i}Q_{lj}^{(i)}(z)a_{il}\right)\frac{\partial}{\partial a_{ij}}\right),$$

связанный с совокупностью систем линейных однородных дифференциальных уравнений (0.6). Тогда

$$\begin{aligned}D\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}f_{ij}(z)&=\sum_{j=1}^{m_i}a_{ij}\frac{\partial f_{ij}}{\partial z}(z)-\sum_{j=1}^{m_i}\left(\sum_{l=1}^{m_i}Q_{lj}^{(i)}(z)a_{il}\right)f_{ij}(z)\\&=\sum_{l=1}^{m_i}a_{il}\frac{\partial f_{il}}{\partial z}(z)-\sum_{l=1}^{m_i}a_{il}\sum_{j=1}^{m_i}Q_{lj}^{(i)}(z)f_{ij}(z)\\&=\sum_{l=1}^{m_i}a_{il}\left(f'_{il}(z)-\sum_{j=1}^{m_i}Q_{lj}^{(i)}(z)f_{ij}(z)\right)=0,\qquad i=1,\dots,m.\qquad(2.7)\end{aligned}$$

Поэтому функциональные формы вида (2.3) после применения к ним оператора D и умножения на $T(z)$ переходят в формы того же вида (с другими коэффициентами-многочленами $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa\in\Omega$).

Положим

$$\begin{aligned} P^{[0]}_{\bar\kappa}(z) =& P_{\bar\kappa}(z), \qquad \bar\kappa \in \Omega, \\ R^{[0]}_{\bar s}(z) =& R_{\bar s}(z), \qquad \bar s \in \Theta, \end{aligned}$$

где $P_{\bar\kappa}(z)$, $\bar\kappa \in \Omega$, и $R_{\bar s}(z)$, $\bar s \in \Theta$, – построенные в лемме 2.1 многочлены и отвечающие им функции (2.6),

$$R^{[0]}(z;\bar a) = \sum_{\bar s\in\Theta} \bar a^{\bar s} R^{[0]}_{\bar s}(z).$$

Тогда функциональные формы

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \big(T(z)D\big)^n R^{[0]}(z;\bar a), \qquad n \geqslant 0,$$

имеют вид

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar u\in U} P^{[n]}_{\bar u}(z;\bar a) \prod_{i=1}^{m} \big(a_{i1}f_{i1}(z) + \dots + a_{im_i}f_{im_i}(z)\big)^{N-u_i}, \qquad n \geqslant 0,$$

и входящие в них многочлены от z удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$P^{[n+1]}_{\bar\kappa}(z) = T(z)\Bigg(\frac{d}{dz}P^{[n]}_{\bar\kappa}(z) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l,j=1}^{m_i}(\kappa_{ij}-\delta_{lj}+1)Q^{(i)}_{lj}(z)P^{[n]}_{\bar\kappa-\bar e_{il}+\bar e_{ij}}(z)\Bigg), \\ n \geqslant 0, \quad \bar\kappa \in \Omega. \tag{2.8}$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и отвечающие каждой функциональной форме

$$R^{[n]}(z;\bar a) = \sum_{\bar s\in\Theta} \bar a^{\bar s} R^{[n]}_{\bar s}(z), \qquad n \geqslant 0,$$

многочлены $R^{[n]}_{\bar s}(z)$, $\bar s \in \Theta$, $n \geqslant 0$, от функций (0.9):

$$R^{[n+1]}_{\bar s}(z) = T(z)\Bigg(\frac{d}{dz}R^{[n]}_{\bar s}(z) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{l,j=1}^{m_i}(s_{ij}-\delta_{lj}+1)Q^{(i)}_{lj}(z)R^{[n]}_{\bar s-\bar e_{il}+\bar e_{ij}}(z)\Bigg), \\ n \geqslant 0, \quad \bar s \in \Theta. \tag{2.9}$$

Если ввести обозначение

$$t = \max\Big\{\deg T, \max_{i,l,j}\{\deg TQ^{(i)}_{lj}\}\Big\},$$

то из леммы 2.1 и соотношений (2.8), (2.9) имеем:

$$\deg P^{[n]}_{\bar\kappa} < M + tn, \qquad n \geqslant 0, \quad \bar\kappa \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\operatorname*{ord}_{z=0} P^{[n]}_{\bar\kappa} \geqslant M - M_{\bar u} - n, \qquad n \geqslant 0, \quad \bar\kappa \in \Omega_{\bar u}, \quad \bar u \in U, \tag{2.11}$$

$$\operatorname*{ord}_{z=0} R^{[n]}_{\bar s} \geqslant K - n, \qquad n \geqslant 0, \quad \bar s \in \Theta. \tag{2.12}$$

Лемма 2.2. а) *Коэффициенты в нормальном разложении многочленов* $P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)$, $n \geqslant 0$, $\bar\kappa \in \Omega$, *являются целыми числами. Кроме того, справедливы оценки*

$$\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\} \leqslant (C_1N)^n\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot C_0^{M/\varepsilon}, \qquad n\geqslant 0, \tag{2.13}$$

откуда при $n<C_2\varepsilon M$

$$\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\} < M^{C_3\varepsilon M}. \tag{2.14}$$

б) *При* $n<C_2\varepsilon M$ *выполняются неравенства*

$$\bigl|R_{\bar s^*}^{[n]}(\alpha)\bigr| < M^{C_4\varepsilon M-K}, \qquad \bar s^* = N(\bar e_{11}+\bar e_{21}+\dots+\bar e_{m1}). \tag{2.15}$$

Доказательство. а) Первая часть утверждения вытекает из соотношений (2.8) и выбора (2.1) многочлена $T(z)$. Положим

$$C_5 = \biggl(1+\sum_{i=1}^m m_i^2\biggr)\cdot\max\Bigl\{\|T\|, \max_{i,l,j}\bigl\{\|TQ_{lj}^{(i)}\|\bigr\}\Bigr\}$$

и воспользуемся рекуррентными соотношениями (2.8) и неравенствами леммы 1.5:

$$\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n+1]}(z)\|\bigr\} \leqslant \binom{M+t(n+1)-1}{t}\cdot C_5N\cdot\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\}, \qquad n\geqslant 0,$$

откуда простая индукция по n дает оценку

$$\begin{aligned}\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\|\bigr\} &\leqslant \left(\frac{C_5N}{t!}\right)^n\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot\max_{\bar\kappa\in\Omega}\bigl\{\|P_{\bar\kappa}^{[0]}(z)\|\bigr\}\\ &\leqslant \left(\frac{C_5N}{t!}\right)^n\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot C_0^{M/\varepsilon}, \qquad n\geqslant 0,\end{aligned}$$

а значит, справедливы оценки (2.13). Неравенства (2.14) получаются из (2.13) с учетом

$$\frac{(M+tn-1)!}{(M-1)!}\cdot N^n < (2M)^{tn}\cdot M^n, \qquad C_0^{M/\varepsilon} = o(M^{\varepsilon M}) \quad \text{при} \quad M\to\infty$$

и $n<C_2\varepsilon M$.

б) Пусть $P_{\bar\kappa,\nu}^{[n]}$, $\nu\in\mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении многочленов $P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)$, $n\geqslant 0$, $\bar\kappa\in\Omega$, соответственно; $R_{\bar s^*,\mu}^{[n]}$, $\mu\in\mathbb{Z}^+$, – коэффициенты в нормальном разложении форм $R_{\bar s^*}^{[n]}(z)$, $n\geqslant 0$; $F_{\bar u,\nu}$, $\nu\in\mathbb{Z}^+$, $\bar u\in U$, – коэффициенты в нормальном разложении функций (0.11). Тогда согласно формуле (2.6)

$$R_{\bar s^*}^{[n]}(z) = \sum_{\bar u\in U} P_{\bar s^*-u_1\bar e_{11}-u_2\bar e_{21}-\dots-u_m\bar e_{m1}}^{[n]}(z)F_{\bar u}(z), \qquad n\geqslant 0,$$

и значит,

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu} = \sum_{\bar{u}\in U}\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}P^{[n]}_{\bar{s}^*-u_1\bar{e}_{11}-u_2\bar{e}_{21}-\dots-u_m\bar{e}_{m1},\nu}F_{\bar{u},\mu-\nu}, \qquad \mu\in\mathbb{Z}^+, \quad n\geqslant 0. \tag{2.16}$$

При этом

$$R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}=0, \qquad \mu<K-n, \quad n<C_2\varepsilon M.$$

Поэтому, если в соотношении (2.16) воспользоваться оценками (2.14) и определением E-функции для совокупности (0.11), то получаем (при $\mu\geqslant K-n$)

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}|\leqslant \operatorname{Card}U\cdot\sum_{\nu=0}^{\mu}\binom{\mu}{\nu}\max_{\bar{\kappa}\in\Omega}\bigl\{\|P^{[n]}_{\bar{\kappa}}(z)\|\bigr\}C^{\mu+1}<C_6^{\mu+1}M^{C_3\varepsilon M},$$

откуда

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)|=\left|\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{R^{[n]}_{\bar{s}^*,\mu}}{\mu!}\alpha^\mu\right|<M^{C_3\varepsilon M}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{|\alpha|^\mu}{\mu!}C_6^{\mu+1}.$$

Пользуясь неравенством

$$\begin{aligned}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{|\alpha|^\mu}{\mu!}C_6^{\mu+1}&\leqslant\frac{|\alpha|^{K-n}C_6^{K-n+1}}{(K-n)!}\sum_{\mu\geqslant K-n}\frac{\bigl(C_6|\alpha|\bigr)^{\mu-K+n}}{(\mu-K+n)!}\\&=\frac{|\alpha|^{K-n}C_6^{K-n+1}}{(K-n)!}e^{C_6|\alpha|}\\&<\bigl(C_6|\alpha|\bigr)^{\operatorname{Card}U\cdot M}\left(\frac{e}{K-n}\right)^{K-n}e^{C_6|\alpha|}\\&<\bigl(C_6|\alpha|\bigr)^{\operatorname{Card}U\cdot M}\left(\frac{e}{M}\right)^{K}e^{C_6|\alpha|}\\&<e^{C_6|\alpha|}\bigl(C_6|\alpha|e\bigr)^{\operatorname{Card}U\cdot M}M^{-K},\end{aligned}$$

поскольку $M<K-n\leqslant K<\operatorname{Card}U\cdot M$, получаем

$$|R^{[n]}_{\bar{s}^*}(\alpha)|<M^{C_3\varepsilon M}e^{C_6|\alpha|}(C_6|\alpha|e)^{\operatorname{Card}U\cdot M}M^{-K}.$$

Последняя оценка с учетом

$$e^{C_6|\alpha|}(C_6|\alpha|e)^{\operatorname{Card}U\cdot M}=o(M^{\varepsilon M}) \qquad \text{при} \quad M\to\infty$$

дает (2.15).

§ 3. Числовые приближающие формы

В настоящем параграфе осуществляется традиционный для метода Зигеля–Шидловского переход от построенных функциональных к числовым приближающим формам. Однако, для этих целей используется новая схема рассуждений.

Ранг числовых приближающих форм. С каждым $\bar{s} \in \Theta$ удобно связать функцию $\mathscr{I}_{\bar{s}}\colon U \to \Omega$, действующую по правилу

$$\mathscr{I}_{\bar{s}}(\bar{u}) = \bar{s} - u_1\bar{e}_{11} - u_2\bar{e}_{21} - \cdots - u_m\bar{e}_{m1}, \qquad \bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m) \in U.$$

При этом функция $\mathscr{I}_{\bar{s}}$ определена не обязательно для всех $\bar{u} \in U$, поскольку мультииндекс в правой части ее определения не всегда имеет неотрицательные координаты.

В новых обозначениях многочлены $R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z)$, $n \geqslant 0$, $\bar{s}^* = N(\bar{e}_{11} + \bar{e}_{21} + \cdots + \bar{e}_{m1})$, от функций $f_{11}(z), f_{21}(z), \ldots, f_{m1}(z)$ перепишутся в виде

$$R_{\bar{s}^*}^{[n]}(z) = \sum_{\bar{u} \in U} P_{\mathscr{I}_{\bar{s}^*}(\bar{u})}^{[n]}(z) F_{\bar{u}}(z), \qquad n \geqslant 0. \tag{3.1}$$

Положим

$$\Omega^* = \bigcup_{\bar{u} \in U} \{\mathscr{I}_{\bar{s}^*}(\bar{u})\}, \qquad \omega^* = \operatorname{Card} \Omega^* = \operatorname{Card} U.$$

Важным моментом метода Зигеля–Шидловского является доказательство того факта, что функциональный определитель, составленный из построенных форм, в нашем случае – это $\det \bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\omega-1;\bar{\kappa}\in\Omega}$, отличен от нуля. Именно такое утверждение было доказано Чудновским в статье [7] с помощью условия нормальности Зигеля для совокупности систем (0.6). На самом деле, в числовых приложениях нам понадобятся только формы (3.1). Поэтому можно воспользоваться более слабым аналогом указанного утверждения, накладывая менее жесткие (по сравнению с условием нормальности) ограничения (см. по этому поводу замечание к теореме III).

Предложение 3.1. *Пусть система линейных однородных дифференциальных уравнений* (0.5) *лежит в классе* $\mathbf{W}^0(\alpha)$, *функции* (0.11) *линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$ *и* M *достаточно велико*, $M > M'$. *Тогда ранг числовой матрицы*

$$\bigl(P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(\alpha)\bigr)_{n=0,1,\ldots,\omega+[C_7\varepsilon M];\bar{\kappa}\in\Omega^*}$$

в точности равен ω^*.

Доказательство. Допустим, что ранг совокупности линейных форм $R^{[n]}(z;\bar{a})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, равен $\widetilde{\omega}$, $\widetilde{\omega} \leqslant \omega$. При этом $\widetilde{\omega} \geqslant 1$, поскольку $R^{[0]}(z;\bar{a}) \not\equiv 0$ (см. по этому поводу замечание 2 к лемме 2.1).

Для произвольного решения

$$a_{ij} = a_{ij}(z), \qquad j = 1, \ldots, m_i, \quad i = 1, \ldots, m,$$

системы (0.6) набор функций

$$x_{\bar{\kappa}}(z) = \bar{a}^{\bar{\kappa}}(z) \prod_{i=1}^{m} \bigl(a_{i1}(z) f_{i1}(z) + \dots + a_{im_i}(z) f_{im_i}(z)\bigr)^{N-u_i}, \qquad \bar{\kappa} \in \Omega_{\bar{u}}, \quad \bar{u} \in U,$$

составляет решение системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dz} x_{\bar{\kappa}} = -\sum_{i=1}^{m} \sum_{l,j=1}^{m_i} \kappa_{ij} Q_{lj}^{(i)}(z) x_{\bar{\kappa}-\bar{e}_{ij}+\bar{e}_{il}}, \qquad \bar{\kappa} \in \Omega, \tag{3.2}$$

порядка ω. Как следует из леммы 7 [1, гл. 3, §4], существует такая фундаментальная матрица решений $\bigl(x_{\bar{\kappa},\eta}(z)\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega;\eta=1,\dots,\omega}$ системы (3.2), что если обозначить

$$R_\eta^{[n]}(z) = \sum_{\bar{\kappa}\in\Omega} P_{\bar{\kappa}}^{[n]}(z) x_{\bar{\kappa},\eta}(z), \qquad n \geqslant 0, \quad \eta = 1, \dots, \omega,$$

то

$$R_\eta^{[n]}(z) \equiv 0, \qquad n \geqslant 0, \quad \eta = \widetilde{\omega} + 1, \dots, \omega. \tag{3.3}$$

Положим, следуя обозначениям §1,

$$\Lambda(z) = \det(x_{\bar{\kappa},\eta})_{\bar{\kappa}\in\Omega;\eta=1,\dots,\omega},$$
$$\lambda(\widetilde{\Omega}; z) = \det(x_{\bar{\kappa}',\eta})_{\bar{\kappa}'\in\Omega\setminus\widetilde{\Omega};\eta=\widetilde{\omega}+1,\dots,\omega}, \qquad \widetilde{\Omega} \subset \Omega, \quad \operatorname{Card}\widetilde{\Omega} = \widetilde{\omega}$$

(считаем $\lambda(\Omega; z) = 1$ в случае $\widetilde{\omega} = \omega$).

Лемма 3.2. *В случае $M > M'$ существует множество $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega} = \widetilde{\omega}$, содержащее Ω^*, такое, что $\lambda(\widetilde{\Omega}; \alpha) \neq 0$.*

Доказательство. Если $\widetilde{\omega} = \omega$, то достаточно положить $\widetilde{\Omega} = \Omega$. Поэтому интересным представляется только случай $\widetilde{\omega} < \omega$.

Пусть утверждение леммы неверно и $\lambda(\widetilde{\Omega}; \alpha) = 0$ для любого $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$, $\widetilde{\Omega} \supset \Omega^*$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega} = \widetilde{\omega}$. Это означает, что ранг числовой матрицы

$$\bigl(x_{\bar{\kappa},\eta}(\alpha)\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega\setminus\Omega^*;\eta=\widetilde{\omega}+1,\dots,\omega}$$

меньше $\omega - \widetilde{\omega}$ и существует такая нетривиальная линейная числовая комбинация $\bigl(x_{\bar{\kappa}}^*(z)\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega}$ столбцов матрицы

$$\bigl(x_{\bar{\kappa},\eta}(z)\bigr)_{\bar{\kappa}\in\Omega;\eta=\widetilde{\omega}+1,\dots,\omega},$$

что

$$x_{\bar{\kappa}}^*(\alpha) = 0, \qquad \bar{\kappa} \in \Omega \setminus \Omega^*. \tag{3.4}$$

Таким образом, столбец $\big(x^*_{\bar\kappa}(z)\big)_{\bar\kappa\in\Omega}$ является нетривиальным решением системы (3.2), причем согласно (3.3) выполнено

$$\sum_{\bar\kappa\in\Omega} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)x^*_{\bar\kappa}(z)\equiv 0, \qquad n\geqslant 0. \tag{3.5}$$

Пространство решений системы (3.2), удовлетворяющее условиям (3.4), имеет размерность ω^*. Ту же размерность имеет пространство, порожденное решениями

$$x_{\bar\kappa}(z)=A_{\bar u}\bar\varphi^{\bar\kappa}(z), \qquad A_{\bar u}\in\mathbb{C}, \quad \bar\kappa\in\Omega_{\bar u}, \quad \bar u\in U, \tag{3.6}$$

системы (3.2), где участвующие функции (0.7) удовлетворяют системе (0.6) и условиям (0.8). В то же время решения вида (3.6) удовлетворяют условиям (3.4). Поэтому верно и обратное. Таким образом, полученное решение $\big(x^*_{\bar\kappa}(z)\big)_{\bar\kappa\in\Omega}$ представимо в виде

$$x^*_{\bar\kappa}(z)=A_{\bar u}\bar\varphi^{\bar\kappa}(z), \qquad \bar\kappa\in\Omega_{\bar u}, \quad \bar u\in U, \tag{3.7}$$

с некоторыми фиксированными постоянными $A_{\bar u}\in\mathbb{C}$.

Поскольку решение (3.7) системы (3.2) нетривиально, $A_{\bar u'}\neq 0$ для некоторого $\bar u'\in U$. С другой стороны,

$$\sum_{\bar u\in U} A_{\bar u}\sum_{\bar\kappa\in\Omega_{\bar u}} P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\bar\varphi^{\bar\kappa}(z)\equiv 0, \qquad n\geqslant 0,$$

согласно (3.5), откуда

$$P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\equiv 0, \qquad n\geqslant 0, \quad \bar\kappa\in\Omega_{\bar u'}, \tag{3.8}$$

ввиду однородной алгебраической независимости функций (0.7) над $\mathbb{C}(z)$.

Так как $\widetilde\omega\geqslant 1$, существуют мультииндексы $\bar s\in\Theta$ такие, что среди многочленов

$$P^{[n]}_{\bar s-\bar r}(z), \qquad n\geqslant 0, \quad |\bar r|=u_i, \quad i=1,\dots,m,$$

есть ненулевые. Выберем среди таких $\bar s$ мультииндекс $\bar s'$ с наибольшей суммой $s'_{11}+s'_{21}+\dots+s'_{m1}$. Тогда в каждой форме

$$\begin{aligned} R^{[n]}_{\bar s'}(z) &= \sum_{\bar u\in U}\sum_{\substack{\bar r=(\bar r_1,\dots,\bar r_m)\\ |\bar r_i|=u_i, i=1,\dots,m}}\prod_{i=1}^m \frac{u_i!}{r_{i1}!\cdots r_{im_i}!}P^{[n]}_{\bar s'-\bar r}(z)\bar f^{\bar r}(z) \\ &= \sum_{\bar u\in U} P^{[n]}_{\mathscr{I}_{\bar s'}(\bar u)}(z)f_{11}^{u_1}(z)f_{21}^{u_2}(z)\cdots f_{m1}^{u_m}(z), \qquad n\geqslant 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

участвует не более ω^* многочленов. Через $\widetilde\omega'$ обозначим ранг совокупности форм (3.9) над $\mathbb{C}(z)$. Ввиду выбора $\bar s'$ имеем $\widetilde\omega'\geqslant 1$, а согласно (3.8) $\widetilde\omega'<\omega^*$. Таким образом, для некоторого непустого подмножества

$$\widetilde\Omega'\subset\Omega'=\bigcup_{\bar u\in U}\{\mathscr{I}_{\bar s'}(\bar u)\}, \qquad \operatorname{Card}\widetilde\Omega'=\widetilde\omega',$$

и рациональных функций

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z), \qquad \bar\kappa\in\widetilde\Omega', \quad \bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde\Omega',$$

выполняются равенства

$$P^{[n]}_{\bar\kappa'}(z)=\sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega'}P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z), \qquad n\geqslant 0, \quad \bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde\Omega'. \tag{3.10}$$

Это означает, что существует $\widetilde\Omega\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde\Omega=\widetilde\omega$, содержащее $\widetilde\Omega'$, такое, что с рациональными функциями

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z), \qquad \bar\kappa\in\widetilde\Omega, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega, \tag{3.11}$$

справедливы равенства

$$R^{[n]}_{\bar\kappa'}(z)=\sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega}P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z), \qquad n\geqslant 0, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega;$$

при этом

$$D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}=0, \qquad \bar\kappa\in\widetilde\Omega\setminus\widetilde\Omega', \quad \bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde\Omega'.$$

Рассуждая также, как и в работе [8, §3] при доказательстве леммы 3.3, с помощью аналога леммы 3.1 и леммы 3.2 можно показать, что для рациональных функций (3.11) существует представление

$$\begin{gathered}D_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z)=\frac{B_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z)}{B(z)}, \qquad B,B_{\bar\kappa,\bar\kappa'}\in\mathbb{C}[z], \quad B\not\equiv 0,\\ \deg B\leqslant C_8\omega N, \quad \deg B_{\bar\kappa,\bar\kappa'}\leqslant C_8\omega N, \qquad \bar\kappa\in\widetilde\Omega, \quad \bar\kappa'\in\Omega\setminus\widetilde\Omega,\end{gathered} \tag{3.12}$$

где постоянная C_8 зависит только от совокупности функций (0.9).

Таким образом, для некоторого множества $\mathscr{N}\subset\{0,1,\dots,\widetilde\omega-1\}$, $\operatorname{Card}\mathscr{N}=\widetilde\omega'$, выполнено

$$\Delta(z)=\det\bigl(P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\bigr)_{n\in\mathscr{N};\bar\kappa\in\widetilde\Omega'}\not\equiv 0,$$

и согласно оценкам (2.10) находим, что

$$\deg\Delta<\widetilde\omega' M+\omega^2 t. \tag{3.13}$$

Из представления (3.12) и равенств (3.10) следует, что

$$\begin{aligned}B(z)R^{[n]}_{\bar s'}(z)&=\sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega'}P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)B(z)\bar f^{\bar s'-\bar\kappa}(z)+\sum_{\bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde\Omega'}P^{[n]}_{\bar\kappa'}(z)B(z)\bar f^{\bar s'-\bar\kappa'}(z)\\ &=\sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega'}P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\biggl(B(z)\bar f^{\bar s'-\bar\kappa}(z)+\sum_{\bar\kappa'\in\Omega'\setminus\widetilde\Omega'}B_{\bar\kappa,\bar\kappa'}(z)\bar f^{\bar s'-\bar\kappa'}(z)\biggr)\\ &=\sum_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega'}P^{[n]}_{\bar\kappa}(z)\widetilde x_{\bar\kappa}(z), \qquad n\in\mathscr{N},\end{aligned} \tag{3.14}$$

где функции $\widetilde{x}_{\bar\kappa} \in \mathbb{C}[z, f_{11}, f_{21}, \dots, f_{m1}]$, $\bar\kappa \in \widetilde\Omega'$, имеют степень не выше $C_8\omega N$ по z и степень d по группе $f_{11}, f_{21}, \dots, f_{m1}$. Кроме того, $\widetilde{x}_{\bar\kappa} \not\equiv 0$, $\bar\kappa \in \widetilde\Omega'$, поскольку $B(z) \not\equiv 0$, а функции (0.11), входящие в формы $\widetilde{x}_{\bar\kappa}$, $\bar\kappa \in \widetilde\Omega'$, линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. По теореме 1 [9] (и замечанию к ней на случай алгебраической зависимости функций (0.9)) порядок нуля каждой из функций $\widetilde{x}_{\bar\kappa}(z)$ в точке $z = 0$ не превосходит

$$C_9(C_8\omega N + 1)d^{m_1+\dots+m_m} < C_{10}\omega N.$$

По построению множество $\widetilde\Omega'$ пересекается с каждым множеством $\Omega_{\bar u}$, $\bar u \in U$, не более чем по одному элементу. Положим

$$U' = \{\bar u : \widetilde\Omega' \cap \Omega_{\bar u} \neq \varnothing\} \subset U, \qquad \operatorname{Card} U' = \widetilde\omega'.$$

Пусть $\bar u^* \in U$ таково, что $M = M_{\bar u^*}$. Если $\bar u^* \in U'$, то положим $\bar r = \widetilde\Omega' \cap \Omega_{\bar u^*}$, в противном случае считаем $\bar r$ некоторым элементом множества $\widetilde\Omega'$. В обоих случаях множество

$$U'' = \{\bar u : \widetilde\Omega' \setminus \{\bar r\} \cap \Omega_{\bar u} \neq \varnothing\} \subset U', \qquad \operatorname{Card} U'' = \operatorname{Card} U' - 1 = \widetilde\omega' - 1,$$

не содержит $\bar u^*$.

Умножим теперь матрицу

$$\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n\in\mathcal{N};\bar\kappa\in\widetilde\Omega'},$$

определитель которой равен $\Delta(z)$, справа на матрицу

$$\bigl(\widetilde{x}_{\bar\kappa}(z) \mid \delta_{\bar\kappa,\bar\kappa'}\bigr)_{\bar\kappa\in\widetilde\Omega';\bar\kappa'\in\widetilde\Omega'\setminus\{\bar r\}},$$

определитель которой равен $\widetilde{x}_{\bar r}$. Полученная в результате этого умножения матрица

$$\bigl(B(z)R_{\bar s'}^{[n]}(z) \mid P_{\bar\kappa'}^{[n]}(z)\bigr)_{n\in\mathcal{N};\bar\kappa'\in\widetilde\Omega'\setminus\{\bar r\}}$$

согласно (3.14) будет иметь ненулевой определитель $\Delta(z)\widetilde{x}_{\bar r}(z)$. В первом столбце этой матрицы стоят функциональные формы, порядок нуля которых в точке $z = 0$ в соответствии с оценками (2.12) не ниже $K - \widetilde\omega$; порядок нуля в точке $z = 0$ многочленов $P_{\bar\kappa'}^{[n]}(z)$, $n \in \mathcal{N}$, согласно (2.11) не ниже $M - M_{\bar u} - \widetilde\omega$, $\bar\kappa' \in \Omega_{\bar u}$, $\bar\kappa' \in \widetilde\Omega' \setminus \{\bar r\}$. Поэтому

$$\operatorname*{ord}_{z=0} \Delta\widetilde{x}_{\bar r} \geqslant K + \sum_{\bar u\in U''}(M - M_{\bar u}) - \widetilde\omega'\cdot\widetilde\omega > K + \sum_{\bar u\in U''}(M - M_{\bar u}) - \omega^2,$$

откуда

$$\begin{aligned}\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta &> K+\sum_{\bar u\in U''}(M-M_{\bar u})-\omega^2-\operatorname*{ord}_{z=0}\widetilde{x}_{\bar r}\\ &> K+\sum_{\bar u\in U''}(M-M_{\bar u})-\omega^2-C_{10}\omega N\\ &\geqslant \operatorname{Card}U''\cdot M+\sum_{\bar u\in U\setminus U''}M_{\bar u}-2\varepsilon M-\omega^2-C_{10}\omega N\\ &= \widetilde{\omega}'M+\sum_{\substack{\bar u\in U\setminus U''\\ \bar u\neq\bar u^*}}M_{\bar u}-2\varepsilon M-\omega^2-C_{10}\omega N.\end{aligned}$$

Сопоставляя последнюю оценку с неравенством (3.13), заключаем, что

$$\sum_{\substack{\bar u\in U\setminus U''\\ \bar u\neq\bar u^*}}M_{\bar u}<2\varepsilon M+\omega^2(t+1)+C_{10}\omega N<3\varepsilon M$$

для всех $M>M'$. Суммирование в левой части последнего неравенства происходит по непустому множеству, поскольку Card $U''=\widetilde{\omega}'-1\leqslant\omega^*-2=\operatorname{Card}U-2$. С другой стороны, $M_{\bar u}\geqslant 3\varepsilon M$ для всех $\bar u\in U$ согласно определению параметров построения, что противоречит последнему неравенству.

Тем самым, исходное предположение является ложным, а следовательно, выполнено утверждение леммы 3.2.

Для выбранного в соответствии с леммой 3.2 множества $\widetilde{\Omega}\subset\Omega$, $\operatorname{Card}\widetilde{\Omega}=\widetilde{\omega}$, обозначим $\Delta(z)=\det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1;\bar\kappa\in\widetilde{\Omega}}$. По лемме 1.3 $\Delta(z)\not\equiv 0$. Кроме того, если в матрице, соответствующей определителю $\Delta(z)$, некоторый столбец заменить с помощью невырожденного линейного преобразования на столбец $\bigl(R_{\bar s^*}^{[n]}(z)\bigr)_{n=0,1,\dots,\widetilde{\omega}-1}$, то согласно оценкам (2.12) мы получим, что

$$\operatorname*{ord}_{z=0}\Delta(z)>K-\widetilde{\omega}\geqslant M. \tag{3.15}$$

Подставляя оценки (2.10), (2.13) и (3.15) в лемму 1.6, получим, что

$$\begin{aligned}\operatorname*{ord}_{z=\alpha}\Delta(z)&<\frac{2\widetilde{\omega}}{\log M}\biggl(\log\Bigl((C_1N)^{\widetilde{\omega}}\frac{(M+t\widetilde{\omega}-1)!}{(M-1)!}C_0^{M/\varepsilon}\Bigr)+2(M+t\widetilde{\omega}-1)(1+\log\widetilde{\omega})\biggr)\\ &\leqslant\frac{2\omega}{\log M}\Bigl(\omega\log(C_1N)+t\omega\log(2M)+\frac{M}{\varepsilon}\log C_0+2(M+t\omega)(1+\log\omega)\Bigr)\\ &\leqslant\frac{C_{11}\omega M}{\varepsilon\log M}\leqslant C_7\varepsilon M,\end{aligned} \tag{3.16}$$

поскольку

$$\frac{\omega}{\varepsilon\log M}\asymp\varepsilon$$

в силу выбора (2.2).

Для завершения доказательства предложения 3.1 остается подставить оценку (3.16) в лемму 1.3 и воспользоваться тем, что $\Omega^*\subset\widetilde{\Omega}$.

Арифметические свойства числовых форм. В этом пункте мы подытожим полученные результаты и, следуя работе А. Бейкера [3], осуществим доказательство теоремы II.

Предложение 3.3. *Пусть система линейных однородных дифференциальных уравнений* (0.5) *лежит в классе* $\mathbf{W}^0(\alpha)$, *функции* (0.11) *линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$ *и* $M > M'$. *Тогда существуют целые числа* $\rho_{\bar u}^{[n]}$, *удовлетворяющие оценкам*

$$|\rho_{\bar u}^{[n]}| < M^{M_{\bar u}+C_{12}\varepsilon M}, \qquad n = 1, \dots, \operatorname{Card} U, \quad \bar u \in U, \tag{3.17}$$

такие, что для числовых форм

$$\xi^{[n]} = \sum_{\bar u \in U} \rho_{\bar u}^{[n]} F_{\bar u}(\alpha) = \sum_{\bar u \in U} \rho_{\bar u}^{[n]} f_{11}^{u_1}(\alpha) f_{21}^{u_2}(\alpha) \cdots f_{m1}^{u_m}(\alpha), \qquad n = 1, \dots, \operatorname{Card} U, \tag{3.18}$$

справедливы оценки

$$|\xi^{[n]}| < M^{-\sum_{\bar u \in U} M_{\bar u} + M + C_{13}\varepsilon M}, \qquad n = 1, \dots, \operatorname{Card} U, \tag{3.19}$$

и, кроме того,

$$\det\bigl(\rho_{\bar u}^{[n]}\bigr)_{n=1,\dots,\operatorname{Card} U;\bar u \in U} \ne 0. \tag{3.20}$$

Доказательство. Воспользуемся предложением 3.1: существуют целые числа $\nu_1, \dots, \nu_{\omega^*}$, $0 \leqslant \nu_1 < \dots < \nu_{\omega^*} \leqslant \omega + [C_7\varepsilon M] < C_2\varepsilon M$, $\omega^* = \operatorname{Card} U$, такие, что

$$\det\bigl(P_{\bar\kappa}^{[\nu_n]}(\alpha)\bigr)_{n=1,\dots,\omega^*;\bar\kappa \in \Omega^*} \ne 0.$$

Пусть $\alpha = a/b$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Для целых чисел

$$\rho_{\bar u}^{[n]} = b^{M+t\nu_n}(M+t\nu_n)!\,P_{\mathscr{I}_{\bar s^*}(\bar u)}^{[n]}(\alpha), \qquad n = 1, \dots, \omega^*, \quad \bar u \in U,$$

согласно оценке (2.14) имеем

$$\begin{aligned}
|\rho_{\bar u}^{[n]}| &< b^{M+t\nu_n}(M+t\nu_n)! \sum_{\mu=\max\{0,M-M_{\bar u}-\nu_n\}}^{M+t\nu_n-1} \frac{M^{C_3\varepsilon M}}{\mu!}|\alpha|^{\mu} \\
&< b^{M+tC_2\varepsilon M}|a|^M e^{|\alpha|}(2e)^M(2M)^{(t+1)C_2\varepsilon M} M^{M_{\bar u}} \\
&\leqslant M^{M_{\bar u}+C_{12}\varepsilon M}, \qquad n = 1, \dots, \omega^*, \quad \bar u \in U,
\end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{\mu=\max\{0,M-M_{\bar u}-\nu\}}^{M+t\nu-1} \frac{M^{C_3\varepsilon M}}{\mu!}|\alpha|^{\mu} < \frac{|\alpha|^{\max\{0,M-M_{\bar u}-\nu\}}}{\max\{0,M-M_{\bar u}-\nu\}!}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{|\alpha|^{\mu}}{\mu!} \leqslant \frac{|a|^M}{\max\{0,M-M_{\bar u}-\nu\}!}\cdot e^{|\alpha|},$$

$$\frac{(M+t\nu)!}{\max\{0,M-M_{\bar u}-\nu\}!} < \frac{(M+t\nu+\nu)!}{(M-M_{\bar u})!} < \frac{(2M)^{M+t\nu+\nu}}{(M-M_{\bar u})^{M-M_{\bar u}}\cdot e^{-(M-M_{\bar u})}} < \frac{(2M)^{M+t\nu+\nu}}{M^{M-M_{\bar u}}\cdot e^{-M}} = (2e)^M(2M)^{(t+1)\nu}M^{M_{\bar u}},$$

$$\nu < \frac{M}{t+1}, \qquad \bar u \in U.$$

В последней оценке мы применили неравенство

$$\frac{M^{M-M_{\bar u}}}{(M-M_{\bar u})^{M-M_{\bar u}}} = \left(1+\frac{M_{\bar u}}{M-M_{\bar u}}\right)^{M-M_{\bar u}} < e^{M_{\bar u}}, \qquad \bar u \in U.$$

Теперь воспользуемся оценкой (2.15) для полученных форм (3.18):

$$|\xi^{[n]}| = b^{M+t\nu_n}(M+t\nu_n)!|R_{\bar s^*}^{[\nu_n]}(\alpha)| < b^{M+tC_2\varepsilon M}(2M)^{M+tC_2\varepsilon M}M^{C_4\varepsilon M-K} \leqslant M^{-\sum_{\bar u\in U}M_{\bar u}+M+C_{13}\varepsilon M}, \qquad n=1,\dots,\omega^*.$$

Предложение доказано.

Доказательство теоремы II. Положим

$$C_{14} = \frac{1}{2}\min_{\bar u\in U}\bigl\{|F_{\bar u}(\alpha)|\bigr\},$$

$$C_{15} = \max\biggl\{3, (\omega^*-2)C_{12}+C_{13}+\frac{1}{\varepsilon(M')\cdot M'\log M'}\,\log\frac{\omega^*!}{C_{14}}\biggr\},$$

где постоянные M', C_{12}, C_{13} определены в предложении 3.3, $\omega^* = \operatorname{Card} U$ и

$$\varepsilon = \varepsilon(M) \asymp (\log M)^{-1/(m_1+\dots+m_m-m+2)} \tag{3.21}$$

определяется из равенств (2.2). Тогда при всех $M > M'$ будут справедливы неравенства $C_{15} \geqslant 3$ и

$$\omega^*!M^{(\omega^*-2)C_{12}\varepsilon M+C_{13}\varepsilon M-C_{15}\varepsilon M} \leqslant C_{14}. \tag{3.22}$$

Для заданной числовой формы

$$r = \sum_{\bar u\in U} h_{\bar u}F_{\bar u}(\alpha), \qquad h_{\bar u}\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}, \quad \bar u\in U, \tag{3.23}$$

обозначим через M наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$M^{(1-C_{15}\varepsilon)M} \geqslant H = \max_{\bar{u}\in U}\{|h_{\bar{u}}|\} \geqslant 3. \tag{3.24}$$

Тогда для всех $M > M''$ выполнено $H > M^{M/2}$ и, в частности,

$$\log\log H > \log M + \log\log M - \log 2 > \log M,$$

откуда и из (3.21)

$$\varkappa = \varkappa(H) = (\log\log H)^{-1/(m_1+\dots+m_m-m+2)} > C_{16}\varepsilon.$$

Следовательно, при $M > M''$ справедлива оценка

$$M^{\varepsilon M} < H^{2\varepsilon} < H^{2\varkappa/C_{16}}. \tag{3.25}$$

Возьмем $\bar{u}^* \in U$ таким образом, что $H = |h_{\bar{u}^*}|$, и положим $M_{\bar{u}^*} = M$. Целые числа $M_{\bar{u}}$, $\bar{u} \ne \bar{u}^*$, выберем так, чтобы они удовлетворяли неравенствам

$$M_{\bar{u}} \geqslant \frac{\log|h_{\bar{u}}|}{\log M} + C_{15}\varepsilon M > M_{\bar{u}} - 1, \qquad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\}, \tag{3.26}$$

откуда, в частности,

$$M_{\bar{u}} \geqslant \frac{\log|h_{\bar{u}}|}{\log M} + C_{15}\varepsilon M \geqslant C_{15}\varepsilon M \geqslant 3\varepsilon M, \qquad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\}. \tag{3.27}$$

Из условий (3.24) и (3.26) следует, что

$$M \geqslant \frac{\log H}{\log M} + C_{15}\varepsilon M \geqslant \frac{\log|h_{\bar{u}}|}{\log M} + C_{15}\varepsilon M > M_{\bar{u}} - 1, \qquad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\},$$

откуда

$$M = M_{\bar{u}^*} = \max_{\bar{u}\in U}\{M_{\bar{u}}\}. \tag{3.28}$$

Условия (3.27) и (3.28) обеспечивают выбор (2.2). Кроме того, можно считать $M > M'$ и $M > M''$, поскольку форм (3.23), для которых $M \leqslant \max\{M', M''\}$, только конечное количество, а значит, для них верна оценка теоремы. Итак, можно воспользоваться предложением 3.3. Формы (3.18) согласно условию (3.20) линейно независимы. Поэтому среди них можно выбрать $m-1$ форму, для определенности $\xi^{[2]}, \dots, \xi^{[\omega^*]}$, так, что формы $r, \xi^{[2]}, \dots, \xi^{[\omega^*]}$ будут линейно независимы. Из целых коэффициентов этих форм составим определитель

$$\tau = \det\begin{pmatrix} h_{\bar{u}} \\ \rho_{\bar{u}}^{[2]} \\ \vdots \\ \rho_{\bar{u}}^{[\omega^*]} \end{pmatrix}_{\bar{u}\in U},$$

отличный от нуля ввиду линейной независимости форм (3.23) и (3.18). Поскольку $\tau \in \mathbb{Z}$, имеем $|\tau| \geqslant 1$. В матрице, соответствующей определителю τ, к столбцу с номером $\bar{u}^*$, домноженному на $F_{\bar{u}^*}(\alpha)$, прибавим остальные столбцы с номерами $\bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\}$, домноженные на $F_{\bar{u}}(\alpha)$ соответственно. Определитель получившейся матрицы равен $\tau F_{\bar{u}^*}(\alpha)$, а с другой стороны, его можно представить в виде

$$\tau_1 r + \sum_{n=2}^{\omega^*} \tau_n \xi^{[n]},$$

где τ_n – алгебраическое дополнение элемента n-й строки и столбца с номером $\bar{u}^*$ в τ. Следовательно,

$$\begin{aligned} |\tau_1| \cdot |r| = \left|\tau F_{\bar{u}^*}(\alpha) - \sum_{n=2}^{\omega^*} \tau_n \xi^{[n]}\right| \geqslant |\tau| \cdot |F_{\bar{u}^*}(\alpha)| - \sum_{n=2}^{\omega^*} |\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}| \\ \geqslant |F_{\bar{u}^*}(\alpha)| - \sum_{n=2}^{\omega^*} |\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}| \geqslant 2C_{14} - \sum_{n=2}^{\omega^*} |\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}|. \end{aligned} \tag{3.29}$$

С помощью оценок (3.17) и поскольку

$$|h_{\bar{u}}| \leqslant M^{M_{\bar{u}} - C_{15}\varepsilon M}, \qquad \bar{u} \in U \setminus \{\bar{u}^*\},$$

из (3.26), находим

$$\begin{aligned} &|\tau_1| < (\omega^* - 1)! \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} M^{M_{\bar{u}} + C_{12}\varepsilon M}, \\ &|\tau_n| < (\omega^* - 1)! \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} M^{M_{\bar{u}}} \cdot M^{(\omega^*-2)C_{12}\varepsilon M - C_{15}\varepsilon M}, \qquad n = 2, \dots, \omega^*, \end{aligned} \tag{3.30}$$

откуда согласно (3.19) и (3.22) имеем

$$|\tau_n| \cdot |\xi^{[n]}| < (\omega^* - 1)! M^{(\omega^*-2)C_{12}\varepsilon M - C_{15}\varepsilon M + C_{13}\varepsilon M} \leqslant \frac{C_{14}}{\omega^*}, \qquad n = 2, \dots, \omega^*.$$

Подставляя последнее неравенство в (3.29), имеем

$$|\tau_1| \cdot |r| > 2C_{14} - (\omega^* - 1)\frac{C_{14}}{\omega^*} > C_{14},$$

откуда, используя (3.25), (3.26), (3.30), находим

$$\begin{aligned} |r| > C_{14}|\tau_1|^{-1} &> \frac{C_{14}}{(\omega^*-1)!} \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} \left(|h_{\bar{u}}| M^{C_{15}\varepsilon M + 1 + C_{12}\varepsilon M}\right)^{-1} \\ &> \frac{C_{14}}{(\omega^*-1)!} \prod_{\bar{u} \neq \bar{u}^*} |h_{\bar{u}}|^{-1} \cdot H^{-2(\omega^*-1)(C_{15}+1+C_{12})\varkappa/C_{16}}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство в точности означает оценку теоремы II с $C = C_{14}/(\omega^* - 1)!$ и $\gamma = 2(\omega^* - 1)(C_{15} + 1 + C_{12})/C_{16}$.

Список литературы

1. *Шидловский А.Б.* Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987.
2. *Спринджук В.Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. М.: Наука, 1977.
3. *Baker A.* On some diophantine inequalities involving the exponential function // Canad. J. Math. 1965. V. 17. №4. P. 616–626.
4. *Siegel C.L.* Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen // Abh. Preuss. Wiss. Phys.–Math. Kl. 1929–1930. №1. P. 1–70.
5. *Макаров Ю.Н.* Об оценках меры линейной независимости значений E-функций // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1978. №2. С. 3–12.
6. *Lang S.* Introduction to Transcendental Numbers. Reading: Addison Wesley Publishing Co., 1966.
7. *Chudnovsky G.V.* On some applications of diophantine approximations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1984. V. 81. March. P. 1926–1930.
8. *Зудилин В.В.* О рациональных приближениях значений одного класса целых функций // Матем. сб. 1995. Т. 186. №4. С. 89–124.
9. *Нестеренко Ю.В.* Оценки числа нулей функций некоторых классов // Acta Arith. 1989. Т. 53. №1. С. 29–46.

Московский государственный
университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ipsun.ras.ru`

Поступила в редакцию
14.12.1995