УДК 511.3

В. В. Зудилин

О мере иррациональности q-аналога $\zeta(2)$

В работе доказывается оценка лиувиллева типа для меры иррациональности чисел

$$\zeta_q(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

в случае $q^{-1}\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$. Доказательство основано на применении q-аналога арифметического метода Чудновского–Рухадзе–Хаты и группы преобразований гипергеометрических рядов – группового подхода Рина–Виолы.

Библиография: 21 название.

Введение

Для комплексного q, $|q|<1$, определим величины

$$\zeta_q(1):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{1-q^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_0(n)q^n,\qquad \zeta_q(2):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_1(n)q^n, \tag{1}$$

где $\sigma_k(n)=\sum_{l|n}l^k$ для $k=0,1$. После домножения рядов в (1) на $(1-q)^k$, $k=1,2$, и почленного предельного перехода при $q\to1-0$ мы получаем (расходящийся) гармонический ряд и (сходящийся) ряд для $\zeta(2)$ соответственно. Иррациональность q-гармонического ряда $\zeta_q(1)$ при $q=1/p$, где $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$, доказана Ж.-П. Безиваном [1] и независимо П. Борвейном [2]; иррациональность $\zeta_q(2)$ при тех же значениях q установлена Д. Дюверне [3]. Из общего результата Ю. В. Нестеренко [4] об арифметических свойствах значений модулярных функций следует трансцендентность значения $\zeta_q(2)$ для любого алгебраического q, $0<|q|<1$.

Цель настоящей работы – установить меру иррациональности числа $\zeta_q(2)$ при $q=1/p$, где $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$. А именно мы доказываем следующий результат.

Теорема. *Пусть $q=1/p$, где $p\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$, и*

$$\zeta_q(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^n}{(1-q^n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p^n}{(p^n-1)^2}. \tag{2}$$

Тогда число $\zeta_q(2)$ иррационально и неравенство

$$\left|\zeta_q(2)-\frac{a}{b}\right|\leqslant|b|^{-4.07869375}$$

имеет конечное число решений в целых числах a и b.

Отметим, что из теоремы Нестеренко [5; теорема 2] вытекает справедливость оценки

$$\left|\zeta_q(2)-\frac{a}{b}\right|>|b|^{-\gamma\ln^9\max\{2,\ln|b|\}}$$

для любых $a,b\in\mathbb{Z}$ с постоянной γ, зависящей только от $q\in\mathbb{Q}$, $0<|q|<1$. Таким образом, доказываемая нами теорема дает качественное усиление иррациональности чисел (2) в случае $q^{-1}\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$ – наличие оценки лиувиллева типа для меры иррациональности. Напомним также, что *показателем иррациональности* вещественного иррационального числа α называется величина

$$\begin{aligned}\mu=\mu(\alpha):=\inf\{c\in\mathbb{R}:\text{ неравенство } |\alpha-a/b|\leqslant|b|^{-c} \text{ имеет}\\ \text{конечное число решений в } a,b\in\mathbb{Z}\};\end{aligned}$$

в случае $\mu(\alpha)<+\infty$ говорят, что α – *лиувиллево число*. В этой терминологии результат теоремы может быть сформулирован в виде следующего неравенства:

$$\mu(\zeta_q(2))\leqslant 4.07869374\dots. \tag{3}$$

Приводимое далее доказательство теоремы основано на q-аналоге метода, предложенного Дж. Рином и К. Виолой для усиления оценки меры иррациональности $\zeta(2)=\pi^2/6$; а именно в работе [6] они доказали неравенство $\mu(\zeta(2))\leqslant 5.44124250\dots$, которое является наилучшим на сегодняшний день результатом для $\zeta(2)$ в этом направлении. Указанный метод – групповой подход – получил дальнейшее продолжение в виде рекорда $\mu(\zeta(3))\leqslant 5.51389062\dots$ для постоянной Апери; последний результат также принадлежит Рину и Виоле [7]. В настоящей работе мы демонстрируем возможности группового подхода для решения новой задачи в теории чисел, придерживаясь q-аналога общей схемы работ [6], [8], [9]. Основные q-арифметические ингредиенты для приложения группового подхода Рина–Виолы получены в [10], [11]; мы формулируем их в §1 для независимости изложения нашей работы. В §§2–6 мы доказываем теорему, а в §7 приводим последовательность линейных форм, являющуюся q-аналогом последовательности Апери [12] для доказательства иррациональности $\zeta(2)$; разумеется, последовательность из §7 также влечет иррациональность и лиувиллевость числа $\zeta_q(2)$ для $q^{-1}\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$. Таким образом, мы даем утвердительный ответ на вопрос У. Ван Аша [13] о существовании доказательства иррациональности q-расширения $\zeta(2)$ "в духе Апери", хотя задача об интерпретации q-последовательности Апери в терминах разностных уравнений и/или ортогональных многочленов нами не решается.

§1. q-арифметика

Напомним стандартные q-обозначения (см. [14; гл. 1]):

$$(a;q)_n:=\prod_{\nu=1}^{n}(1-aq^{\nu-1}),\qquad (a_1,a_2,\dots,a_m;q)_n:=(a_1;q)_n(a_2;q)_n\cdots(a_m;q)_n,$$

$$\Gamma_q(t):=\frac{(q;q)_\infty}{(q^t;q)_\infty}(1-q)^{1-t},\qquad [n]_q!:=\Gamma_q(n+1)=\frac{(q;q)_n}{(1-q)^n},$$

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q:=\frac{[n]_q!}{[k]_q!\,[n-k]_q!}=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k\cdot(q;q)_{n-k}},$$

где $k=0,1,\dots,n$ и $n=0,1,2,\dots$.

Рассмотрим *круговые многочлены* (*многочлены деления круга*)

$$\Phi_l(x):=\prod_{\substack{k=1\\(k,l)=1}}^{l}(x-e^{2\pi ik/l}), \quad \deg\Phi_l(x)=\varphi(l), \qquad l=1,2,\dots, \tag{4}$$

где $\varphi(\,\cdot\,)$ – функция Эйлера. Хорошо известно, что коэффициенты многочленов (4) являются целыми числами [15; теорема 13.3] и для каждого $l=1,2,\dots$ многочлен $\Phi_l(x)$ неприводим над $\mathbb{Z}$ [15; теорема 13.4] (см. также [16; § 60]); кроме того, имеет место формула

$$x^n-1=\prod_{l|n}\Phi_l(x). \tag{5}$$

Поскольку

$$(x;x)_n=(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^n)=\pm\prod_{k=1}^{n}\prod_{l|k}\Phi_l(x),$$

мы получаем, что разложение $(x;x)_n$ в произведение неприводимых многочленов содержит только многочлены (4), причем

$$\operatorname{ord}_{\Phi_l(x)}(x;x)_n=\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor, \qquad l=1,2,\dots, \tag{6}$$

где $\lfloor\,\cdot\,\rfloor$ обозначает целую часть числа. Простым следствием формулы (6) является

$$\operatorname{ord}_{\Phi_l(x)}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_x=\left\lfloor\frac{n}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{k}{l}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{n-k}{l}\right\rfloor, \tag{7}$$

что делает возможным рассматривать круговые многочлены как q-аналоги простых чисел. В свою очередь, формула (7) влечет включения

$$\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_x\in\mathbb{Z}[x], \qquad k=0,1,\dots,n, \quad n=0,1,2,\dots, \tag{8}$$

которые обычно доказываются с помощью q-версии треугольника Паскаля.

Из разложения (5) следует, что многочлен

$$D_n(x):=\prod_{l=1}^{n}\Phi_l(x)\in\mathbb{Z}[x]$$

является наименьшим общим кратным многочленов $x-1, x^2-1,\dots,x^n-1$, иными словами, $D_n(x)$ есть многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий включениям

$$D_n(x)\cdot\frac{1}{x^k-1}\in\mathbb{Z}[x], \qquad k=1,2,\dots,n.$$

Формула Мертенса [17], [18; § 18.5, теорема 330]

$$\sum_{l\leqslant n}\varphi(l)=\frac{3}{\pi^2}n^2+O(n\log n),$$

являющаяся в нашем случае q-аналогом асимптотического закона распределения простых чисел, приводит к следующим утверждениям.

Лемма 1 (см. [10; §2], [13; лемма 2]). *Для любого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|D_n(p)|}{n^2} = \frac{3}{\pi^2}\log|p|.$$

Лемма 2 (см. [11; лемма 1]). *Для любого $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ и любого полуинтервала $[u, v) \subset (0, 1)$, $u, v \in \mathbb{Q}$, справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{l:\{n/l\}\in[u,v)} \log|\Phi_l(p)| = \frac{3}{\pi^2}\bigl(\psi'(u) - \psi'(v)\bigr)\log|p| = -\frac{3\log|p|}{\pi^2}\int_u^v \mathrm{d}\psi'(z),$$

где $\{a\} = a - \lfloor a \rfloor$ и $\psi(z)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

§ 2. q-гипергеометрическая конструкция

Зафиксируем целые параметры

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

удовлетворяющие условиям

$$\min\{a_2, a_3\} \geqslant b_1 = 1, \quad a_2 < b_2, \quad a_3 < b_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 \leqslant b_2 + b_3 - 1, \tag{10}$$

и рассмотрим q-базисный гипергеометрический ряд [14]

$$\begin{aligned} G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &:= \frac{\Gamma_q(a_2)\,\Gamma_q(a_3)\,\Gamma_q(b_2 - a_2)\,\Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1-q)^2\Gamma_q(b_2)\,\Gamma_q(b_3)} \\ &\qquad \times {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3} \\ q^{b_2}, q^{b_3} \end{matrix} \,\middle|\, q, q^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3} \right) \\ &= \frac{\Gamma_q(a_2)\,\Gamma_q(a_3)\,\Gamma_q(b_2 - a_2)\,\Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1-q)^2\Gamma_q(b_2)\,\Gamma_q(b_3)} \\ &\qquad \times \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q^{b_1}, q^{b_2}, q^{b_3}; q)_t} q^{t(b_2+b_3-a_1-a_2-a_3)}, \end{aligned} \tag{11}$$

абсолютно сходящийся в области $|q| < 1$. Очевидная симметрия величины $G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ приводит к следующему утверждению.

Лемма 3. *Величина $G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ инвариантна относительно преобразования*

$$\sigma\colon \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ 1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1, a_3, a_2 \\ 1, b_3, b_2 \end{pmatrix}.$$

Из тождества Холла [14; формула (3.2.10)]

$$\begin{aligned} &{}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{a_1}, q^{a_2}, q^{a_3} \\ q^{b_2}, q^{b_3} \end{matrix} \,\middle|\, q, q^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3} \right) \\ &\quad = \frac{\Gamma_q(b_2)\,\Gamma_q(b_3)\,\Gamma_q(b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3)}{\Gamma_q(a_2)\,\Gamma_q(b_2 + b_3 - a_2 - a_3)\,\Gamma_q(b_2 + b_3 - a_1 - a_2)} \\ &\qquad \times {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{b_3-a_2}, & q^{b_2-a_2}, q^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3} \\ q^{b_2+b_3-a_2-a_3}, & q^{b_2+b_3-a_1-a_2} \end{matrix} \,\middle|\, q, q^{a_2} \right) \end{aligned}$$

вытекает также “нетривиальное” преобразование величины $G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Лемма 4. *Величина $G_q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ инвариантна относительно преобразования*

$$\tau\colon \begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ 1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_3-a_2, & b_2-a_2, b_2+b_3-a_1-a_2-a_3 \\ 1, b_2+b_3-a_2-a_3, & b_2+b_3-a_1-a_2 \end{pmatrix}.$$

Следующее утверждение содержит рекуррентные соотношения для величины (11), которые являются q-аналогом тождеств, полученных при доказательстве теоремы 2.1 в [6; с. 31].

Лемма 5. *Справедливо тождество*

$$\begin{aligned} &q^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3} G_q\begin{pmatrix} a_1, a_2, a_3 \\ b_1, b_2, b_3 \end{pmatrix} \\ &\qquad = G_q\begin{pmatrix} a_1, a_2-1, a_3-1 \\ b_1, b_2-1, b_3-1 \end{pmatrix} - G_q\begin{pmatrix} a_1-1, a_2-1, a_3-1 \\ b_1, b_2-1, b_3-1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{(q^{a_1};q)_{t+1}}{(q;q)_{t+1}} - \frac{(q^{a_1-1};q)_{t+1}}{(q;q)_{t+1}} &= \frac{(q^{a_1};q)_t}{(q;q)_t}\cdot\frac{(1-q^{a_1+\nu})-(1-q^{a_1-1})}{1-q^{\nu+1}} \\ &= q^{a_1-1}\frac{(q^{a_1};q)_t}{(q;q)_t}, \end{aligned}$$

заключаем, что

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}q^{tc} - \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}q^{tc} \\ &\quad = \sum_{t=0}^{\infty}\biggl(\frac{(q^{a_1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_{t+1}}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_{t+1}} - \frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_{t+1}}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_{t+1}}\biggr)q^{(t+1)c} \\ &\quad = q^{c+a_1-1}\frac{(1-q^{a_2-1})(1-q^{a_3-1})}{(1-q^{b_2-1})(1-q^{b_3-1})}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1},q^{a_2},q^{a_3};q)_t}{(q,q^{b_2},q^{b_3};q)_t}q^{tc}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $c=b_2+b_3-a_1-a_2-a_3$. С другой стороны,

$$\begin{aligned} &\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}q^{tc} - \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}q^{t(c+1)} \\ &\quad = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}(1-q^t)q^{tc} \\ &\quad = \sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_{t+1}}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_{t+1}}(1-q^{t+1})q^{(t+1)c} \\ &\quad = q^c\frac{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})(1-q^{a_3-1})}{(1-q^{b_2-1})(1-q^{b_3-1})}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1},q^{a_2},q^{a_3};q)_t}{(q,q^{b_2},q^{b_3};q)_t}q^{tc}. \end{aligned} \tag{14}$$

Складывая левые и правые части соотношений (13) и (14), получаем

$$\begin{aligned}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}q^{tc}-\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1},q^{a_3-1};q)_t}{(q,q^{b_2-1},q^{b_3-1};q)_t}q^{t(c+1)}\\ =q^c\frac{(1-q^{a_2-1})(1-q^{a_3-1})}{(1-q^{b_2-1})(1-q^{b_3-1})}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1},q^{a_2},q^{a_3};q)_t}{(q,q^{b_2},q^{b_3};q)_t}q^{tc}.\end{aligned}\tag{15}$$

После домножения обеих частей равенства (15) на

$$\frac{\Gamma_q(a_2-1)\,\Gamma_q(a_3-1)\,\Gamma_q(b_2-a_2)\,\Gamma_q(b_3-a_3)}{(1-q)^2\Gamma_q(b_2-1)\,\Gamma_q(b_3-1)}$$

мы приходим к требуемому соотношению (12).

В следующем параграфе мы показываем, что построенные нами величины (11) являются линейными формами от 1 и $\zeta_q(2)$.

§ 3. Арифметика линейных форм

Свяжем с параметрами (9) другой набор $\boldsymbol{c}$ из десяти целых чисел:

$$\begin{aligned}&c_{00}=(b_1+b_2+b_3)-(a_1+a_2+a_3)-2,\\ &c_{jk}=\begin{cases}a_j-b_k & \text{для } k=1,\\ b_k-a_j-1 & \text{для } k=2,3,\end{cases}\qquad j,k=1,2,3.\end{aligned}\tag{16}$$

Согласно (10) набор

$$\{c_{00},c_{21},c_{22},c_{33},c_{31}\}\tag{17}$$

состоит из целых неотрицательных чисел, в то время как целые параметры в наборе

$$\{c_{11},c_{23},c_{13},c_{12},c_{32}\}\tag{18}$$

могут быть и отрицательными. Отметим также, что исходные параметры (9) однозначно восстанавливаются по любому из наборов (17) и (18):

$$\begin{aligned}&a_1=c_{22}+c_{33}-c_{00}+1, && a_2=c_{21}+1, && a_3=c_{31}+1,\\ &b_1=1, && b_2=c_{21}+c_{22}+2, && b_3=c_{31}+c_{33}+2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_1=c_{11}+1, && a_2=c_{11}+c_{13}-c_{23}+1, && a_3=c_{11}+c_{12}-c_{32}+1,\\ &b_1=1, && b_2=c_{11}+c_{12}+2, && b_3=c_{11}+c_{13}+2.\end{aligned}$$

Согласно леммам 3, 4 и формулам (16) действие преобразований σ,τ на параметры $\boldsymbol{c}$ определяется следующим образом:

$$\sigma\colon \begin{pmatrix}c_{00},c_{21},c_{22},c_{33},c_{31}\\ c_{11},c_{23},c_{13},c_{12},c_{32}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}c_{00},c_{31},c_{33},c_{22},c_{21}\\ c_{11},c_{32},c_{12},c_{13},c_{23}\end{pmatrix},\tag{19}$$

$$\tau\colon \begin{pmatrix}c_{00},c_{21},c_{22},c_{33},c_{31}\\ c_{11},c_{23},c_{13},c_{12},c_{32}\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}c_{21},c_{22},c_{33},c_{31},c_{00}\\ c_{23},c_{13},c_{12},c_{32},c_{11}\end{pmatrix}.\tag{20}$$

Таким образом, преобразования σ, τ задают перестановки 10-элементного множества

$$\boldsymbol{c} := \begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31} \\ c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32} \end{pmatrix} \tag{21}$$

и не меняют величины

$$H_q(\boldsymbol{c}) := G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}). \tag{22}$$

Обозначим через $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{S}_{10}$ группу, порожденную перестановками (19), (20); поскольку порядок σ равен 5, а порядок τ равен 2, группа $\mathfrak{G}_0$ состоит из десяти элементов.

Отметим также, что формулы (16) позволяют записать рекуррентные соотношения леммы 5 в виде

$$\begin{aligned} q^{c_{00}+1} H_q(\boldsymbol{c}) = H_q &\begin{pmatrix} c_{00}, c_{21}-1, & c_{22}, & c_{33}, & c_{31}-1 \\ c_{11}, & c_{23}, & c_{13}-1, c_{12}-1, & c_{32} \end{pmatrix} \\ &- H_q \begin{pmatrix} c_{00}+1, c_{21}-1, c_{22}, c_{33}, c_{31}-1 \\ c_{11}-1, \quad c_{23}, \quad c_{13}, c_{12}, \quad c_{32} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{23}$$

Для каждого набора параметров (9) и соответствующего набора (16) определим величину

$$\begin{aligned} m = m(\boldsymbol{c}) &:= c_{00} + c_{21} + c_{22} + c_{33} + c_{31} = c_{11} + c_{23} + c_{13} + c_{12} + c_{32} \\ &= 2(b_1 + b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) - 3; \end{aligned} \tag{24}$$

через $m_1 = m_1(\boldsymbol{c})$ и $m_2 = m_2(\boldsymbol{c})$ обозначим два максимальных элемента, стоящих на разных местах в наборе (18); тот факт, что $m_1 \geqslant 0$ и $m_2 \geqslant 0$, доказан в [6; теорема 2.1]. Положим

$$\begin{aligned} M_0 = M_0(\boldsymbol{c}) &:= \begin{cases} c_{00}c_{21} + c_{31}c_{33} - c_{21}c_{33}, & \text{если } c_{21} \leqslant c_{31}, \\ c_{00}c_{31} + c_{21}c_{22} - c_{31}c_{22}, & \text{если } c_{21} \geqslant c_{31}, \end{cases} = M_0(\sigma\boldsymbol{c}), \\ M = M(\boldsymbol{c}) &:= \max_{\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}_0} \{M_0(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})\} = \max_{0 \leqslant j \leqslant 4} \{M_0(\tau^j \boldsymbol{c})\} \geqslant 0, \end{aligned} \tag{25}$$

где через $\mathfrak{g}\boldsymbol{c}$ обозначается действие перестановки $\mathfrak{g} \in \mathfrak{G}_0$ на множестве (21). Как следует из определения, величины

$$H_q(\boldsymbol{c}), \quad m(\boldsymbol{c}), \quad m_1(\boldsymbol{c}), \quad m_2(\boldsymbol{c}), \quad M(\boldsymbol{c})$$

инвариантны относительно действия группы $\mathfrak{G}_0$.

Отметим, что $\zeta_q(2)$ не является рациональной (и даже алгебраической) функцией над полем $\mathbb{C}(q)$.

Предложение 1. *Справедливо включение*

$$x^{-M} \cdot D_{m_1}(x) D_{m_2}(x) \cdot H_q(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}[x]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x], \qquad \text{где} \quad x = q^{-1}. \tag{26}$$

Доказательство. Будем проводить доказательство индукцией по величине

$$m(\boldsymbol{c}) = c_{00} + c_{21} + c_{22} + c_{33} + c_{31}, \tag{27}$$

где каждое слагаемое в сумме (27) неотрицательно.

В качестве базы индукции рассмотрим случаи, когда по крайней мере три из параметров (17) нулевые. Здесь возможны две ситуации: три нулевых параметра расположены или не расположены по порядку в циклическом наборе (17) (т.е. параметр c_{00} считается следующим за параметром c_{31}). Первая ситуация с помощью одного или нескольких применений циклической перестановки (19) может быть сведена к случаю

$$c_{22} = c_{33} = c_{31} = 0, \tag{28}$$

а вторая – к случаю

$$c_{00} = c_{22} = c_{33} = 0; \tag{29}$$

непосредственная проверка показывает, что в каждом из этих случаев $M(\boldsymbol{c}) = 0$. Рассмотрим сначала вторую возможность.

В случае (29) имеем

$$c_{11} = c_{22} + c_{33} - c_{00} = 0,$$

откуда

$$a_1 = c_{11} + 1 = 1, \quad b_2 = c_{22} + a_2 + 1 = a_2 + 1, \quad b_3 = c_{33} + a_3 + 1 = a_3 + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
H_q(\boldsymbol{c}) &= G_q\begin{pmatrix} 1, & a_2, & a_3 \\ 1, & a_2+1, & a_3+1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{\Gamma_q(a_2)\,\Gamma_q(a_3)}{(1-q)^2\Gamma_q(a_2+1)\,\Gamma_q(a_3+1)} \cdot {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q, & q^{a_2}, & q^{a_3} \\ & q^{a_2+1}, & q^{a_3+1} \end{matrix} \;\middle|\; q, q\right) \\
&= \frac{1}{(1-q^{a_2})(1-q^{a_3})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_2}, q^{a_3}; q)_t}{(q^{a_2+1}, q^{a_3+1}; q)_t} q^t \\
&= \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^t}{(1-q^{t+a_2})(1-q^{t+a_3})}.
\end{aligned}$$

Если $a_2 = a_3$, то

$$\begin{aligned}
H_q(\boldsymbol{c}) &= q^{-a_2} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{t+a_2}}{(1-q^{t+a_2})^2} = q^{-a_2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} - \sum_{n=1}^{a_2-1}\right) \frac{q^n}{(1-q^n)^2} \\
&= q^{-a_2}\zeta_q(2) - q^{-a_2} \sum_{n=1}^{a_2-1} \frac{q^n}{(1-q^n)^2} = x^{a_2}\zeta_q(2) - x^{a_2} \sum_{n=1}^{a_2-1} \frac{x^n}{(x^n-1)^2},
\end{aligned}$$

откуда вытекает включение

$$x^{-a_2} \cdot D_{a_2-1}(x)^2 \cdot H_q(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}[x]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[x]. \tag{30}$$

Если $a_2 \neq a_3$, то (считая для определенности $a_2 < a_3$)

$$H_q(\boldsymbol{c}) = \frac{1}{q^{a_2} - q^{a_3}} \sum_{t=0}^{\infty}\biggl(\frac{1}{1-q^{t+a_2}} - \frac{1}{1-q^{t+a_3}}\biggr) = \frac{1}{q^{a_2} - q^{a_3}} \sum_{n=a_2}^{a_3-1} \frac{1}{1-q^n}$$
$$= \frac{x^{a_3}}{x^{a_3-a_2}-1} \cdot x^{a_2} \sum_{n=a_2}^{a_3-1} \frac{x^{n-a_2}}{x^n-1}$$

и, значит,

$$x^{-(a_2+a_3)} \cdot D_{a_3-a_2}(x) D_{a_3-1}(x) \cdot H_q(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}[x]. \tag{31}$$

Оба включения (30), (31) означают, что в случае (29) требуемое утверждение (26) выполнено, поскольку

$$\{c_{11}, c_{23}, c_{13}, c_{12}, c_{32}\} = \{0, a_3 - a_2, a_3 - 1, a_2 - 1, a_2 - a_3\}.$$

Рассмотрим теперь случай (28). Возможность $c_{00} = 0$ исследована выше, поэтому считаем далее $c_{00} > 0$, т.е. $a_1 \leqslant 0$ и ряд в (11) содержит лишь конечное число слагаемых. По аналогичной причине мы можем считать $c_{21} > 0$ (иначе после применения перестановки τ мы вновь приходим к случаю (29)), так что $a_2 > 1$. Имеем

$$b_2 = c_{22} + a_2 + 1 = a_2 + 1, \quad a_3 = c_{31} + 1 = 1, \quad b_3 = c_{33} + a_3 + 1 = 2,$$

откуда

$$H_q(\boldsymbol{c}) = G_q\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & 1 \\ 1, & a_2+1, & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{\Gamma_q(a_2)}{(1-q)^2 \Gamma_q(a_2+1)} \cdot {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{a_1}, & q^{a_2}, & q \\ & q^{a_2+1}, & q^2 \end{matrix} \,\middle|\, q, q^{-a_1+2}\right)$$
$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^{a_2})} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(q^{a_1}, q^{a_2}; q)_t}{(q^2, q^{a_2+1}; q)_t} q^{t(-a_1+2)}. \tag{32}$$

Полагая $n = -a_1 \geqslant 0$, перепишем получившийся ряд в виде

$$H_q(\boldsymbol{c}) = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(q^{-n}; q)_t}{(q; q)_{t+1}} \cdot \frac{q^{t(n+2)}}{1-q^{t+a_2}} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(q^{-n}; q)_t}{(q; q)_t} \cdot \frac{q^{t(n+2)}}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+a_2})}$$
$$= \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t x^{t(t+1)/2} \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}_x \cdot \frac{x^{(t+1)+(t+a_2)-t(n+2)}}{(x^{t+1}-1)(x^{t+a_2}-1)}$$
$$= x^{a_2+1-n(n+1)/2} \sum_{t=0}^{n-1} (-1)^t \begin{bmatrix} n \\ t \end{bmatrix}_x \cdot \frac{x^{(n-t)(n-t-1)/2}}{(x^{t+1}-1)(x^{t+a_2}-1)}. \tag{33}$$

Согласно (8) формула (33) влечет включение

$$x^{-(a_2+1)+n(n+1)/2} \cdot D_n(x) D_{a_2+n-1}(x) \cdot H_q(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Z}[x]. \tag{34}$$

С другой стороны, сумма в правой части (32) имеет иное представление:

$$\begin{aligned}H_q(\boldsymbol{c})&=\frac{q^{a_1-2}}{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{(q^{a_1-1},q^{a_2-1};q)_{t+1}}{(q,q^{a_2};q)_{t+1}}q^{(t+1)(-a_1+2)}\\&=\frac{q^{a_1-2}}{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})}\left({}_2\phi_1\left(\begin{matrix}q^{a_1-1},q^{a_2-1}\\q^{a_2}\end{matrix}\;\middle|\;q,q^{-a_1+2}\right)-1\right).\end{aligned}$$

Теперь q-аналог Гейне [14; формула (1.5.2)] для формулы суммирования Гаусса позволяет свернуть последний q-базисный ряд:

$$\begin{aligned}H_q(\boldsymbol{c})&=\frac{q^{a_1-2}}{(1-q^{a_1-1})(1-q^{a_2-1})}\left(\frac{(q;q)_{-a_1+1}}{(q^{a_2};q)_{-a_1+1}}-1\right)\\&=-q^{-1}\frac{(q;q)_n}{(q^{a_2-1};q)_{n+2}}-\frac{q^{-n-2}}{(1-q^{-n-1})(1-q^{a_2-1})}\\&=-x^{a_2(n+2)+n}\frac{(x;x)_n}{(x^{a_2-1};x)_{n+2}}-\frac{x^{a_2+n+1}}{(1-x^{n+1})(x^{a_2-1}-1)},\end{aligned}$$

откуда следует включение

$$x^{-(a_2+n+1)}\cdot(x^{n+1}-1)(x;x)_{a_2+n+1}\cdot H_q(\boldsymbol{c})\in\mathbb{Z}[x]. \tag{35}$$

Так как многочлен x взаимно прост с многочленами $D_n(x)$, $D_{a_2+n-1}(x)$, $x^{n+1}-1$ и $(x;x)_{a_2+n+1}$, включения (34), (35) можно записать в виде

$$x^{-(a_2+n+1)}\cdot D_n(x)D_{a_2+n-1}(x)\cdot H_q(\boldsymbol{c})\in\mathbb{Z}[x]$$

или после возврата к параметру $a_1=-n$

$$x^{-(a_2-a_1+1)}\cdot D_{-a_1}(x)D_{a_2-a_1-1}(x)\cdot H_q(\boldsymbol{c})\in\mathbb{Z}[x].$$

Поскольку

$$\{c_{11},c_{23},c_{13},c_{12},c_{32}\}=\{a_1-1,-a_2+1,-a_1+1,a_2-a_1,a_2-1\},$$

требуемое включение (26) также оказывается выполненным. Это завершает доказательство базы индукции.

Предположим теперь, что по крайней мере три параметра в наборе (17) ненулевые и для наборов $\boldsymbol{c}'$ с условием $m(\boldsymbol{c}')<m(\boldsymbol{c})$ требуемое включение (26) доказано.

Рассмотрим сначала случай $M(\boldsymbol{c})=0$. Среди трех ненулевых параметров в циклическом наборе (17) всегда можно выбрать два, не являющихся соседями; циклическая перестановка (20) позволяет перейти к $\mathfrak{G}_0$-эквивалентному набору, у которого $c_{21}>0$ и $c_{31}>0$. Тогда включение (26) вытекает из рекуррентных соотношений (23) и индуктивного предположения, поскольку для наборов

$$\begin{aligned}\boldsymbol{c}'&=\begin{pmatrix}c_{00},c_{21}-1, & c_{22}, & c_{33}, & c_{31}-1\\ c_{11}, & c_{23}, & c_{13}-1, c_{12}-1, & c_{32}\end{pmatrix},\\ \boldsymbol{c}''&=\begin{pmatrix}c_{00}+1,c_{21}-1,c_{22},c_{33},c_{31}-1\\ c_{11}-1, & c_{23}, & c_{13},c_{12}, & c_{32}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{36}$$

выполнено

$$m_1(\boldsymbol{c}') \leqslant m_1(\boldsymbol{c}), \quad m_2(\boldsymbol{c}') \leqslant m_2(\boldsymbol{c}), \qquad m_1(\boldsymbol{c}'') \leqslant m_1(\boldsymbol{c}), \quad m_2(\boldsymbol{c}'') \leqslant m_2(\boldsymbol{c}) \tag{37}$$

и $M(\boldsymbol{c}') \geqslant 0, M(\boldsymbol{c}'') \geqslant 0$.

Пусть теперь $M(\boldsymbol{c}) > 0$. Ввиду $\mathfrak{G}_0$-инвариантности величины $M(\boldsymbol{c})$ можно считать, что $M_0(\boldsymbol{c}) = M(\boldsymbol{c})$. Если при этом $c_{21} > 0$ и $c_{31} > 0$, то, применяя вновь тождества (23), индуктивное предположение для наборов (36) и учитывая соотношения (37) и

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{c}') &\geqslant M_0(\boldsymbol{c}') = M_0(\boldsymbol{c}) - c_{00} = M(\boldsymbol{c}) - c_{00}, \\ M(\boldsymbol{c}'') &\geqslant M_0(\boldsymbol{c}'') = M_0(\boldsymbol{c}) - c_{00} + \min\{c_{21} - 1, c_{31} - 1\} \\ &\geqslant M_0(\boldsymbol{c}) - c_{00} = M(\boldsymbol{c}) - c_{00}, \end{aligned}$$

мы вновь приходим к требуемому включению (26).

Предположим, что для набора $\boldsymbol{c}$ с условием $M_0(\boldsymbol{c}) = M(\boldsymbol{c}) > 0$ по крайней мере один из параметров c_{21}, c_{31} нулевой. Оба параметра не могут быть нулями одновременно, поскольку в этом случае имеем $M_0(\boldsymbol{c}) = 0$. Не ограничивая общности, можно считать $c_{21} = 0$ и $c_{31} > 0$, поскольку $M_0(\boldsymbol{c}) = M_0(\sigma\boldsymbol{c})$. Как следует из определения (25), в нашем случае $M(\boldsymbol{c}) = M_0(\boldsymbol{c}) = c_{31}c_{33} > 0$, откуда также получаем $c_{33} > 0$. По крайней мере один из параметров c_{00}, c_{22} ненулевой, так как $c_{21} = 0$ и в наборе (17) не более двух нулевых параметров. В случае $c_{00} > 0$ рассмотрим тождество (23) для набора $\tau^4\boldsymbol{c}$:

$$x^{-c_{31}-1} H_q(\tau^4\boldsymbol{c}) = H_q(\boldsymbol{c}') - H_q(\boldsymbol{c}''), \tag{38}$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{c}' &= \begin{pmatrix} c_{31}, c_{00} - 1, & c_{21}, & c_{22}, & c_{33} - 1 \\ c_{32}, & c_{11}, & c_{23} - 1, c_{13} - 1, & c_{12} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{c}'' &= \begin{pmatrix} c_{31} + 1, c_{00} - 1, c_{21}, c_{22}, c_{33} - 1 \\ c_{32} - 1, \quad c_{11}, \quad c_{23}, c_{13}, \quad c_{12} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{39}$$

Из $\mathfrak{G}_0$-инвариантности величин $m_1(\boldsymbol{c}), m_2(\boldsymbol{c})$ для наборов (39) имеем оценки (37). Кроме того,

$$\begin{aligned} M(\boldsymbol{c}') &\geqslant M_0(\tau\boldsymbol{c}') = c_{31}(c_{33} - 1) = M(\boldsymbol{c}) - c_{31}, \\ M(\boldsymbol{c}'') &\geqslant M_0(\tau\boldsymbol{c}'') = (c_{31} + 1)(c_{33} - 1) \geqslant M(\boldsymbol{c}) - c_{31}, \end{aligned}$$

откуда в соответствии с индуктивным предположением для наборов (39) и тождеством (38) следует требуемое включение (26). В случае $c_{22} > 0$ аналогичные рассуждения с заменой $\tau^4\boldsymbol{c}$ на $\tau^3\boldsymbol{c}$ также приводят к включению (26). Это завершает доказательство индукционного перехода и предложения 1.

§ 4. Групповая структура для $\zeta_q(2)$

Потребуем теперь более жестких, чем (10), ограничений на параметры (9):

$$\{b_1 = 1\} \leqslant \{a_1, a_2, a_3\} < \{b_2, b_3\}, \quad a_1 + a_2 + a_3 \leqslant b_1 + b_2 + b_3 - 2. \tag{40}$$

Тогда все параметры (16) неотрицательны, и помимо преобразований σ, τ можно также рассматривать всевозможные перестановки параметров a_1, a_2, a_3, с одной стороны, и перестановку параметров b_2, b_3, с другой стороны, не меняющие величины

$$\frac{\Gamma_q(a_1)}{\Gamma_q(b_2 - a_2)\,\Gamma_q(b_3 - a_3)} \cdot G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{[c_{11}]_q!}{[c_{22}]_q!\,[c_{33}]_q!} \cdot H_q(\boldsymbol{c}). \tag{41}$$

Таким образом, величина (41) инвариантна относительно действия “$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$-тривиальной” группы $\mathfrak{G}_1$, порожденной перестановками

$$\mathfrak{a}_1 = (a_1\ a_3), \quad \mathfrak{a}_2 = (a_1\ a_3), \quad \mathfrak{b} = (b_2\ b_3). \tag{42}$$

В терминах параметров $\boldsymbol{c}$ действие перестановок (42) записывается следующим образом:

$$\begin{gathered} \mathfrak{a}_1 = (c_{11}\ c_{31})(c_{12}\ c_{32})(c_{13}\ c_{33}), \quad \mathfrak{a}_2 = (c_{21}\ c_{31})(c_{22}\ c_{32})(c_{23}\ c_{33}), \\ \mathfrak{b} = (c_{12}\ c_{13})(c_{22}\ c_{23})(c_{32}\ c_{33}). \end{gathered} \tag{43}$$

Рассматривая теперь группу

$$\mathfrak{G} = \langle \mathfrak{G}_0, \mathfrak{G}_1 \rangle = \langle \sigma, \tau, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{b} \rangle$$

как группу перестановок 10-элементного множества $\boldsymbol{c}$, а также учитывая $\mathfrak{G}_0$-инвариантность величины (22) и $\mathfrak{G}_1$-инвариантность величины (41), мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 6 (ср. с [6; § 3], [9; лемма 14]). *Величина*

$$\frac{H_q(\boldsymbol{c})}{\Pi_q(\boldsymbol{c})}, \qquad \text{где} \quad \Pi_q(\boldsymbol{c}) = [c_{00}]_q!\,[c_{21}]_q!\,[c_{22}]_q!\,[c_{33}]_q!\,[c_{31}]_q!,$$

инвариантна относительно действия группы $\mathfrak{G}$.

Отметим также $\mathfrak{G}$-инвариантность величины (24).

В [6] доказано, что группа $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{10}$ имеет порядок 120. В качестве образующих группы $\mathfrak{G}$ можно выбрать [9; § 6] перестановки (43) и

$$\mathfrak{h} = (c_{00}\ c_{22})(c_{11}\ c_{33})(c_{13}\ c_{31})$$

второго порядка; при этом $\sigma = \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{b}$ и $\tau = (\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{h})^2$.

С учетом непосредственно проверяемого равенства

$$[n]_q! = x^{-n(n-1)/2}[n]_x!, \qquad \text{где} \quad x = q^{-1},$$

из леммы 6 вытекает $\mathfrak{G}$-инвариантность величины

$$\frac{H_q(\boldsymbol{c})}{x^{-N(\boldsymbol{c})}\Pi_x(\boldsymbol{c})}, \tag{44}$$

где мы положили

$$N(\boldsymbol{c}) := \frac{c_{00}(c_{00}-1) + c_{21}(c_{21}-1) + c_{22}(c_{22}-1) + c_{33}(c_{33}-1) + c_{31}(c_{31}-1)}{2}. \tag{45}$$

Лемма 7. *Величина* $M(\boldsymbol{c})+N(\boldsymbol{c})$ *инвариантна относительно действия группы* $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Разумеется, это утверждение может быть доказано с использованием определений (25) и (45) величин $M(\boldsymbol{c})$ и $N(\boldsymbol{c})$ соответственно. Возникающий громоздкий перебор делает подобное доказательство скучным, поэтому мы ограничимся лишь указанием на тот факт, что утверждение достаточно проверить для "общего" набора параметров $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ и отвечающего ему набора $\boldsymbol{c}$. С помощью программы для калькулятора `GP-PARI` мы проверили справедливость утверждения леммы для всех наборов параметров (9), удовлетворяющих условиям (40) и $b_2+b_3\leqslant 100$. Тем самым, лемма доказана.

Обозначая через $m_1^*\geqslant m_2^*$ два максимальных элемента, стоящих на разных местах в 10-элементном множестве $\boldsymbol{c}$, согласно предложению 1 получаем включение

$$x^{-M}\cdot D_{m_1^*}(x)D_{m_2^*}(x)\cdot H_q(\boldsymbol{c})\in\mathbb{Z}[x]\zeta_q(2)+\mathbb{Z}[x],\qquad \text{где}\quad x=q^{-1}. \tag{46}$$

Кроме того, величины m_1^*,m_2^* (в отличие от введенных в § 3 величин m_1,m_2) являются $\mathfrak{G}$-инвариантными.

Для заданного набора параметров $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, удовлетворяющего условиям (40), и соответствующего набора (16) определим многочлен

$$\Omega(x):=\prod_{l=1}^{m_1^*}\Phi_l^{\nu_l}(x)\in\mathbb{Z}[x],$$

где

$$\nu_l:=\max_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}}\operatorname{ord}_{\Phi_l(x)}\frac{\Pi_x(\boldsymbol{c})}{\Pi_x(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})},\qquad l=1,2,\dots. \tag{47}$$

Предложение 2. *Справедливо включение*

$$x^{-M}\cdot D_{m_1^*}(x)D_{m_2^*}(x)\cdot\Omega^{-1}(x)\cdot H_q(\boldsymbol{c})\in\mathbb{Z}[x]\zeta_q(2)+\mathbb{Z}[x],\qquad \textit{где}\quad x=q^{-1}. \tag{48}$$

Доказательство. Ввиду $\mathfrak{G}$-инвариантности величин $M(\boldsymbol{c})+N(\boldsymbol{c})$, $m_1^*(\boldsymbol{c})$, $m_2^*(\boldsymbol{c})$ и (44) согласно включению (46) заключаем, что для любой перестановки $\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}$ линейная форма

$$\begin{aligned}
&x^{-M(\boldsymbol{c})}\cdot D_{m_1^*(\boldsymbol{c})}(x)D_{m_2^*(\boldsymbol{c})}(x)\cdot\frac{\Pi_x(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})}{\Pi_x(\boldsymbol{c})}\cdot H_q(\boldsymbol{c})\\
&\quad=x^{-M(\boldsymbol{c})-N(\boldsymbol{c})+N(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})}\cdot D_{m_1^*(\boldsymbol{c})}(x)D_{m_2^*(\boldsymbol{c})}(x)\cdot H_q(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})\\
&\quad=x^{-M(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})}\cdot D_{m_1^*(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})}(x)D_{m_2^*(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})}(x)\cdot H_q(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})
\end{aligned}$$

лежит в $\mathbb{Z}[x]\zeta_q(2)+\mathbb{Z}[x]$. Воспользуемся теперь тем фактом, что $\zeta_q(2)$ как функция от $x=q^{-1}$ иррациональна над $\mathbb{Q}(x)$; кроме того, в разложении $\Pi_x(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})$, $\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}$, на неприводимые множители участвуют только многочлены (4). С учетом доказанных в [6] неравенств

$$\nu_l=0\quad\text{для } l>m_1^*,\qquad \nu_l\leqslant 1\quad\text{для } m_2^*<l\leqslant m_1^*$$

мы получаем требуемое включение (48). Предложение доказано.

Ввиду $\mathfrak{G}_0$-инвариантности величины $H_q(\boldsymbol{c})$ для определения показателей (47) нам достаточно рассмотреть действие представителей левых смежных классов факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ (порядка 12) на 5-элементное (упорядоченное) множество $\boldsymbol{c}' = (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31})$:

$$\begin{aligned} \nu_l &= \max_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0} \operatorname{ord}_{\Phi_l(x)} \frac{\Pi_x(\boldsymbol{c})}{\Pi_x(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})} \\ &= \max_{\mathfrak{g}\in\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0}\biggl(\left\lfloor\frac{c_{00}}{l}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c_{21}}{l}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c_{22}}{l}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c_{33}}{l}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{c_{31}}{l}\right\rfloor \\ &\qquad - \left\lfloor\frac{\mathfrak{g}c_{00}}{l}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\mathfrak{g}c_{21}}{l}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\mathfrak{g}c_{22}}{l}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\mathfrak{g}c_{33}}{l}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{\mathfrak{g}c_{31}}{l}\right\rfloor\biggr), \qquad l = 1, 2, \dots, m_1^*, \end{aligned} \tag{49}$$

согласно (6). В качестве таких представителей выберем

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{g}_0 = \mathrm{id}, & \mathfrak{g}_1 = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1, & \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{a}_1, & \mathfrak{g}_3 = \mathfrak{a}_2, \\ \mathfrak{g}_4 = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{g}_5 = \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1, & \mathfrak{g}_6 = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1, & \mathfrak{g}_7 = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_2, \\ \mathfrak{g}_8 = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{g}_9 = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1, & \mathfrak{g}_{10} = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_2, & \mathfrak{g}_{11} = \mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{h}\,\mathfrak{a}_2\,\mathfrak{a}_1. \end{array} \tag{50}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_0\boldsymbol{c}' &= (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}), & \mathfrak{g}_1\boldsymbol{c}' &= (c_{00}, c_{11}, c_{12}, c_{33}, c_{31}), \\ \mathfrak{g}_2\boldsymbol{c}' &= (c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{13}, c_{11}), & \mathfrak{g}_3\boldsymbol{c}' &= (c_{00}, c_{31}, c_{32}, c_{23}, c_{21}), \\ \mathfrak{g}_4\boldsymbol{c}' &= (c_{00}, c_{11}, c_{12}, c_{23}, c_{21}), & \mathfrak{g}_5\boldsymbol{c}' &= (c_{00}, c_{31}, c_{32}, c_{13}, c_{11}), \\ \mathfrak{g}_6\boldsymbol{c}' &= (c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{11}, c_{13}), & \mathfrak{g}_7\boldsymbol{c}' &= (c_{22}, c_{13}, c_{32}, c_{23}, c_{21}), \\ \mathfrak{g}_8\boldsymbol{c}' &= (c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{23}, c_{21}), & \mathfrak{g}_9\boldsymbol{c}' &= (c_{22}, c_{13}, c_{32}, c_{31}, c_{33}), \\ \mathfrak{g}_{10}\boldsymbol{c}' &= (c_{12}, c_{23}, c_{32}, c_{31}, c_{33}), & \mathfrak{g}_{11}\boldsymbol{c}' &= (c_{12}, c_{23}, c_{32}, c_{13}, c_{11}). \end{aligned} \tag{51}$$

§ 5. Оценки линейных форм и их коэффициентов

В этом параграфе мы также будем считать, что набор целочисленных параметров (9) удовлетворяет условиям (40). Используя явное выражение величины (22) в виде

$$\begin{gathered} G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = A\zeta_q(2) - B, \\ A = A_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = A_q(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}(q), \quad B = B_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = B_q(\boldsymbol{c}) \in \mathbb{Q}(q), \end{gathered} \tag{52}$$

мы получим оценки для $|G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})|$ и $|A|$ при $|q| \leqslant 1/2$.

Начнем с иного представления величины (11). Именно рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} R_q(t) = R_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}; t) &:= \frac{\Gamma_q(b_2 - a_2)\,\Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1-q)^2\Gamma_q(a_1 - b_1 + 1)} \cdot q^{t(b_1+b_2+b_3-a_1-a_2-a_3-2)} \\ &\quad\times \frac{\Gamma_q(t + a_1)\,\Gamma_q(t + a_2)\,\Gamma_q(t + a_3)}{\Gamma_q(t + b_1)\,\Gamma_q(t + b_2)\,\Gamma_q(t + b_3)} \end{aligned} \tag{53}$$

и запишем (11) в виде

$$G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \sum_{t=0}^{\infty} R_q(t) q^t. \tag{54}$$

Предложение 3. *Пусть* $c_{00} = b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3 - 1 \geqslant 5$ *и* $|q| \leqslant 1/2$. *Тогда справедливы оценки*

$$3^{-3(b_2+b_3)} < |G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| < 3^{3(b_2+b_3)}. \tag{55}$$

Доказательство. Из функционального уравнения для Γ_q-функции

$$\Gamma_q(t+1) = \frac{1-q^t}{1-q}\Gamma_q(t) \tag{56}$$

получаем

$$\frac{R_q(t+1)}{R_q(t)} = \frac{(1-q^{t+a_1})(1-q^{t+a_2})(1-q^{t+a_3})}{(1-q^{t+b_1})(1-q^{t+b_2})(1-q^{t+b_3})} \cdot q^{c_{00}},$$

откуда

$$\frac{|R_q(t+1)q^{t+1}|}{|R_q(t)q^t|} \leqslant \frac{(1+|q|)^3}{(1-|q|)^3} \cdot |q|^{c_{00}+1} \leqslant 3^3 \cdot 2^{-(c_{00}+1)} < \frac{1}{2}. \tag{57}$$

Применяя теперь полученную оценку (57) к ряду в (54), находим, что, с одной стороны,

$$\begin{aligned} |G_q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| &\leqslant |R_q(0)| \cdot \left(1 + \frac{|R_q(1)q|}{|R_q(0)|} + \frac{|R_q(2)q^2|}{|R_q(0)|} + \frac{|R_q(3)q^3|}{|R_q(0)|} + \cdots\right) \\ &< |R_q(0)| \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots\right) = 2|R_q(0)| \end{aligned} \tag{58}$$

и, с другой стороны,

$$|G_q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| \geqslant |R_q(0)| \cdot \left(1 - \frac{|R_q(1)q|}{|R_q(0)|}\right) > \frac{1}{2}|R_q(0)|. \tag{59}$$

Воспользуемся тривиальными неравенствами

$$3^{-n} \leqslant \left(\frac{1-|q|}{1+|q|}\right)^n \leqslant |\Gamma_q(n+1)| \leqslant \left(\frac{1+|q|}{1-|q|}\right)^n \leqslant 3^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

для оценки всех Γ_q-множителей, входящих в $R_q(0)$. С учетом

$$(b_2-a_2-1)+(b_3-a_3-1)+(a_1-b_1)+(a_1+a_2+a_3-3)+(b_1+b_2+b_3-3) < 3(b_2+b_3)-1$$

это приводит к оценкам

$$3^{-3(b_2+b_3)+1} < |R_q(0)| < 3^{3(b_2+b_3)-1}. \tag{60}$$

Собирая теперь вместе (58)–(60), получаем требуемые неравенства (55). Предложение доказано.

Предложение 4. *Для коэффициента* $A = A_q(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{Q}(q)$ *в представлении* (52) *при* $|q| \leqslant 1/2$ *справедлива оценка*

$$|A| < 3^{2(b_2+b_3)} \cdot |q|^{a_1(a_1-1)/2+a_2(a_2-1)/2+a_3(a_3-1)/2-(b_2-1)(b_3-1)}. \tag{61}$$

Доказательство. Нам будет удобно ввести упорядоченную версию $(\boldsymbol{a}^*, \boldsymbol{b}^*)$ набора параметров $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, именно

$$b_1^* = 1 < a_1^* \leqslant a_2^* \leqslant a_3^* < b_2^* \leqslant b_3^*,$$
$$\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\} = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\} = \{b_1, b_2, b_3\}.$$

Согласно функциональному уравнению (56) выполнено

$$\frac{\Gamma_q(t+a_j)}{\Gamma_q(t+b_j)} = \begin{cases} \dfrac{(1-q^{t+b_j})(1-q^{t+b_j+1})\cdots(1-q^{t+a_j-1})}{(1-q)^{a_j-b_j}} & \text{при } j=1, \\ \dfrac{(1-q)^{b_j-a_j}}{(1-q^{t+a_j})(1-q^{t+a_j+1})\cdots(1-q^{t+b_j-1})} & \text{при } j=2,3; \end{cases}$$

поэтому $R_q(t)$ в (53) является рациональной функцией параметра $T = q^t$ над полем $\mathbb{Q}(q) = \mathbb{Q}(q^{-1})$:

$$\begin{aligned} R_q(t) = {} & \frac{[b_2-a_2-1]_q!\,[b_3-a_3-1]_q!}{[a_1-b_1]_q!} \cdot \frac{(1-q^{b_1}T)\cdots(1-q^{a_1-1}T)}{(1-q)^{a_1-b_1}} \\ & \times \frac{(1-q)^{b_2-a_2-1}}{(1-q^{a_2}T)\cdots(1-q^{b_2-1}T)} \cdot \frac{(1-q)^{b_3-a_3-1}}{(1-q^{a_3}T)\cdots(1-q^{b_3-1}T)} \\ & \times T^{b_2+b_3-a_1-a_2-a_3-1}. \end{aligned} \tag{62}$$

Поскольку степень числителя функции (62) как функции от T на двойку меньше степени знаменателя, имеем

$$R_q(t) = O(T^{-2}) \qquad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{63}$$

и $R_q(t)$ может быть разложена в сумму простейших дробей:

$$R_q(t) = \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} \frac{A_k}{(1-q^kT)^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} \frac{B_k}{1-q^kT}.$$

Из условия (63) следует, что

$$\sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} B_k q^{-k} = -\sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} \operatorname{Res}_{T=q^{-k}} R_q(t) = \operatorname{Res}_{T=\infty} R_q(t) = 0;$$

поэтому

$$\begin{aligned} G_q(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \sum_{t=0}^{\infty} \biggl(\sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} \frac{A_k q^t}{(1-q^{t+k})^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} \frac{B_k q^t}{1-q^{t+k}} \biggr) \\ &= \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} A_k q^{-k} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{t+k}}{(1-q^{t+k})^2} + \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} B_k q^{-k} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{q^{t+k}}{1-q^{t+k}} \\ &= \sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1} A_k q^{-k} \biggl(\sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l=1}^{k-1} \biggr) \frac{q^l}{(1-q^l)^2} + \sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1} B_k q^{-k} \biggl(\sum_{l=1}^{\infty} - \sum_{l=1}^{k-1} \biggr) \frac{q^l}{1-q^l} \\ &= A\zeta_q(2) - B, \end{aligned}$$

где

$$A=\sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1}A_kq^{-k}, \tag{64}$$

$$B=\sum_{k=a_3^*}^{b_2^*-1}A_kq^{-k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{q^l}{(1-q^l)^2}+\sum_{k=a_2^*}^{b_3^*-1}B_kq^{-k}\sum_{l=1}^{k-1}\frac{q^l}{1-q^l}$$

– рациональные функции переменной q. Для коэффициентов A_k, $a_3^*\leqslant k<b_2^*$, с помощью представления (62) находим явные формулы (напомним, что $b_1=1$):

$$\begin{aligned}
A_k&=R_q(t)(1-q^kT)^2\big|_{T=q^{-k}}=R_q(t)(1-q^{t+k})^2\big|_{t=-k}\\
&=(-1)^{a_1-b_1}q^{(a_1-b_1)(a_1+b_1-2k-1)/2}\begin{bmatrix}k-b_1\\a_1-b_1\end{bmatrix}_q\\
&\quad\times(-1)^{k-a_2}q^{(k-a_2)(k-a_2+1)/2}\begin{bmatrix}b_2-a_2-1\\k-a_2\end{bmatrix}_q\\
&\quad\times(-1)^{k-a_3}q^{(k-a_3)(k-a_3+1)/2}\begin{bmatrix}b_3-a_3-1\\k-a_3\end{bmatrix}_q\cdot q^{-k(b_2+b_3-a_1-a_2-a_3-1)}\\
&=(-1)^{a_1+a_2+a_3-1}q^{a_1(a_1-1)/2+a_2(a_2-1)/2+a_3(a_3-1)/2-k(b_2+b_3-3)+k^2}\\
&\quad\times\begin{bmatrix}k-b_1\\a_1-b_1\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}b_2-a_2-1\\k-a_2\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}b_3-a_3-1\\k-a_3\end{bmatrix}_q,\qquad a_3^*\leqslant k<b_2^*.
\end{aligned}$$

Функция $k^2-k(b_2+b_3-2)$ убывает при изменении k от a_3^* до $b_2^*-1=\min\{b_2,b_3\}-1$ и принимает в указанном промежутке наименьшее значение $-(b_2-1)(b_3-1)$ при $k=b_2^*-1$. Кроме того,

$$\left|\begin{bmatrix}k-b_1\\a_1-b_1\end{bmatrix}_q\right|=\left|\frac{(1-q^{k-a_1+1})\cdots(1-q^{k-b_1})}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{a_1-b_1})}\right|\leqslant\left(\frac{1+|q|}{1-|q|}\right)^{a_1-b_1},$$

$$\begin{aligned}
\left|\begin{bmatrix}b_j-a_j-1\\k-a_j\end{bmatrix}_q\right|&=\left|\frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{b_j-a_j-1})}{(1-q)\cdots(1-q^{b_j-k-1})\cdot(1-q)\cdots(1-q^{k-b_j})}\right|\\
&\leqslant\left(\frac{1+|q|}{1-|q|}\right)^{b_j-a_j-1},\qquad j=2,3.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
|A_kq^{-k}|\leqslant&\left(\frac{1+|q|}{1-|q|}\right)^{a_1-a_2-a_3+b_2+b_3-3}\\
&\times|q|^{a_1(a_1-1)/2+a_2(a_2-1)/2+a_3(a_3-1)/2-(b_2-1)(b_3-1)},\qquad a_3^*\leqslant k<b_2^*.
\end{aligned}$$

С учетом неравенств $a_1<b_2$ и

$$\frac{1+|q|}{1-|q|}\leqslant3$$

при $|q|\leqslant1/2$, а также того факта, что в суммировании (64) участвует не более $b_3<3^{b_3}$ слагаемых, мы окончательно приходим к требуемой оценке (61). Предложение доказано.

§ 6. Мера иррациональности $\zeta_q(2)$

Зафиксируем теперь набор целочисленных параметров (*направлений*) $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, удовлетворяющих условиям

$$\{\beta_1 = 0\} \leqslant \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\} \leqslant \{\beta_2, \beta_3\}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leqslant \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \tag{65}$$

и для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$ свяжем их с исходным набором параметров (9) по правилу

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 n + 1, \quad a_2 = \alpha_2 n + 1, \quad a_3 = \alpha_3 n + 1, \\ b_1 &= \beta_1 n + 1, \quad b_2 = \beta_2 n + 2, \quad b_3 = \beta_3 n + 2. \end{aligned} \tag{66}$$

Определяя множество дополнительных параметров $\boldsymbol{c}$ равенствами

$$\begin{aligned} c_{00} &= (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3), \\ c_{jk} &= \begin{cases} \alpha_j - \beta_k & \text{для } k = 1, \\ \beta_k - \alpha_j & \text{для } k = 2, 3, \end{cases} \qquad j, k = 1, 2, 3, \end{aligned} \tag{67}$$

мы получаем, что 10-элементное множество $\boldsymbol{c} \cdot n$ отвечает набору параметров (66) в соответствии с (16). С набором (67) свяжем определенные ранее характеристики $m(\boldsymbol{c}), m_1^*(\boldsymbol{c}), m_2^*(\boldsymbol{c}), M(\boldsymbol{c})$ и рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \omega_0(z) = \max_{0 \leqslant k \leqslant 11} \bigl(&\lfloor c_{00} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{21} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{22} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{33} \cdot z \rfloor + \lfloor c_{31} \cdot z \rfloor \\ &- \lfloor \mathfrak{g}_k c_{00} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{21} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{22} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{33} \cdot z \rfloor - \lfloor \mathfrak{g}_k c_{31} \cdot z \rfloor \bigr), \end{aligned} \tag{68}$$

где представители $\mathfrak{g}_k$, $k = 0, 1, \dots, 11$, левых смежных классов факторгруппы $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ и их действие на параметры $c_{00}, c_{21}, c_{22}, c_{33}, c_{31}$ указаны в (50), (51). Отметим, что ввиду $\mathfrak{G}$-инвариантности характеристики $m(\boldsymbol{c})$ функция (68) является 1-периодической.

Предложение 5. *В приведенных выше обозначениях положим*

$$C_0 = M - \frac{3}{\pi^2} \biggl(m_1^{*2} + m_2^{*2} + \int_0^1 \omega_0(z) \, d\psi'(z) \biggr), \qquad C_1 = \beta_2 \beta_3 - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{2}.$$

Если $C_0 > 0$, то число $\zeta_q(2)$ иррационально для любого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, и справедлива оценка

$$\mu(\zeta_q(2)) \leqslant \frac{C_1}{C_0} \tag{69}$$

для показателя иррациональности.

Доказательство. Пусть $q^{-1} = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Для заданного набора направлений $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ и соответствующего набора (67) рассмотрим последовательности

$$H_n := H(\boldsymbol{c} n), \qquad L_n := p^{-Mn^2} \cdot D_{m_1^* n}(p) D_{m_2^* n}(p) \cdot \prod_{l=1}^{m_1^* n} \Phi_l^{-\omega_0(n/l)}(p),$$
$$n = 0, 1, 2, \dots .$$

Поскольку $M(\boldsymbol{c}n) = Mn^2$, $m_1^*(\boldsymbol{c}n) = m_1^* n$, $m_2^*(\boldsymbol{c}n) = m_2^* n$ и $\nu_l = \omega_0(n/l)$ согласно (49), $n = 0, 1, 2, \dots$, предложение 2 влечет включения

$$\widetilde{H}_n := L_n H_n \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[p] \subset \mathbb{Z}\zeta_q(2) + \mathbb{Z}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots .$$

С другой стороны, записывая линейные формы H_n в виде $H_n = A_n\zeta_q(2) - B_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, и применяя предложения 3, 4, находим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|H_n|}{n^2} = 0, \qquad \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|A_n|}{n^2} \leqslant C_1 \log|p|, \tag{70}$$

а асимптотическое поведение последовательности L_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяется с помощью лемм 1, 2:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|L_n|}{n^2} = -C_0 \log|p|. \tag{71}$$

Поэтому в случае $C_0 > 0$ иррациональность числа $\zeta_q(2)$ вытекает из оценок

$$0 < |\widetilde{H}_n| < |p|^{-(C_0 - \varepsilon)n^2},$$

справедливых для всех $n \geqslant n_0(\varepsilon)$, где в качестве $\varepsilon > 0$ можно взять $C_0/2$. Неравенство (69) выводится из предельных соотношений (70), (71) стандартным образом (см., например, [19; § 11.3, упражнение 3] или [20; лемма 2]). Это завершает доказательство предложения.

Доказательство теоремы. Реализуя перебор по всем целочисленным направлениям $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, удовлетворяющим условиям (65) и $\beta_2 + \beta_3 \leqslant 100$, с помощью программы для калькулятора `GP-PARI`, мы обнаружили, что наилучшая оценка (3) для показателя иррациональности $\zeta_q(2)$ достигается (с точностью до действия группы $\mathfrak{G}$ и умножения вектора направлений на положительное целое) на наборе

$$\alpha_1 = 5, \quad \alpha_2 = 6, \quad \alpha_3 = 7, \qquad \beta_2 = 14, \quad \beta_3 = 15.$$

В этом случае $M = 74$, $m_1^* = 11$, $m_2^* = 10$,

$$\omega_0(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in \bigl[0, \frac{1}{11}\bigr) \cup \bigl[\frac{1}{9}, \frac{1}{8}\bigr) \cup \bigl[\frac{2}{9}, \frac{1}{4}\bigr) \cup \bigl[\frac{1}{3}, \frac{4}{11}\bigr) \cup \bigl[\frac{4}{9}, \frac{1}{2}\bigr) \\ & \qquad \cup \bigl[\frac{3}{5}, \frac{5}{8}\bigr) \cup \bigl[\frac{7}{10}, \frac{8}{11}\bigr) \cup \bigl[\frac{4}{5}, \frac{5}{6}\bigr), \\ 1, & \text{если } z \in \bigl[\frac{1}{11}, \frac{1}{9}\bigr) \cup \bigl[\frac{1}{8}, \frac{2}{11}\bigr) \cup \bigl[\frac{1}{5}, \frac{2}{9}\bigr) \cup \bigl[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\bigr) \cup \bigl[\frac{4}{11}, \frac{3}{8}\bigr) \\ & \qquad \cup \bigl[\frac{2}{5}, \frac{4}{9}\bigr) \cup \bigl[\frac{1}{2}, \frac{6}{11}\bigr) \cup \bigl[\frac{5}{9}, \frac{3}{5}\bigr) \cup \bigl[\frac{5}{8}, \frac{7}{10}\bigr) \cup \bigl[\frac{8}{11}, \frac{3}{4}\bigr) \\ & \qquad \cup \bigl[\frac{7}{9}, \frac{4}{5}\bigr) \cup \bigl[\frac{5}{6}, \frac{7}{8}\bigr) \cup \bigl[\frac{8}{9}, \frac{9}{10}\bigr), \\ 2, & \text{если } z \in \bigl[\frac{2}{11}, \frac{1}{5}\bigr) \cup \bigl[\frac{3}{8}, \frac{2}{5}\bigr) \cup \bigl[\frac{6}{11}, \frac{5}{9}\bigr) \cup \bigl[\frac{3}{4}, \frac{7}{9}\bigr) \cup \bigl[\frac{7}{8}, \frac{8}{9}\bigr), \end{cases}$$

для $z \in [0, 1)$. Следовательно,

$$C_0 = 74 - \frac{3}{\pi^2}(11^2 + 10^2 - 102.57252091\dots) = 38.00236293\dots,$$

$$C_1 = 14 \cdot 15 - \frac{5^2 + 6^2 + 7^2}{2} = 155$$

и согласно предложению 5 мы получаем требуемую оценку (3). Теорема доказана.

§ 7. q-аналог последовательности Апери

Выбор параметров

$$a_1 = a_2 = a_3 = n+1, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = b_3 = 2n+2, \qquad \text{где} \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{72}$$

приводит к величинам $C_0 = 1 - 6/\pi^2 > 0$, $C_1 = 5/2$ в обозначениях предложения 5, а значит, к иррациональности числа $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$. Соответствующая оценка для показателя иррациональности в этом случае имеет вид

$$\mu(\zeta_q(2)) \leqslant \frac{5\pi^2}{2\pi^2 - 12} = 6.37636524\dots.$$

Цель этого параграфа – показать, что случай (72) является точным q-аналогом оригинального доказательства Апери [12] иррациональности $\zeta(2)$.

Зафиксируем целое $n \geqslant 0$ и запишем разложение рациональной функции (53) в сумму простейших дробей относительно параметра $T = q^t$:

$$\begin{aligned} R_q(t) &= \frac{(1-qT)\cdots(1-q^nT)}{(1-q^{n+1}T)\cdots(1-q^{2n+1}T)} \cdot \frac{(q;q)_n T^n}{(1-q^{n+1}T)\cdots(1-q^{2n+1}T)} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \frac{(-1)^k q^{k(k+1)/2 - kn - n(n+1)/2}}{1 - q^{k+n+1}T} \\ &\qquad \times \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \frac{(-1)^j q^{j(j+1)/2 - jn - n(n+1)}}{1 - q^{j+n+1}T} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^2 \frac{q^{k(k+1) - 2kn - 3n(n+1)/2}}{(1 - q^{t+k+n+1})^2} \\ &\quad + (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \ne k}}^{n} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q q^{k(k+1)/2 + j(j+1)/2 - (k+j)n - 3n(n+1)/2} \\ &\qquad \times \frac{(-1)^{k+j}}{q^k - q^j} \biggl(\frac{1}{1 - q^{t+k+n+1}} - \frac{1}{1 - q^{t+j+n+1}} \biggr). \end{aligned} \tag{73}$$

Учитывая равенства

$$R_q(t) = 0 \qquad \text{для} \quad t = -1, -2, \dots, -n$$

и

$$\left.\begin{aligned} \sum_{t=-n}^{\infty} \frac{q^t}{(1 - q^{t+k+n+1})^2} &= q^{-(k+n+1)} \biggl(\zeta_q(2) - \sum_{l=1}^{k} \frac{q^l}{(1-q^l)^2} \biggr), \\ \sum_{t=-n}^{\infty} \frac{q^t}{1 - q^{t+k+n+1}} &= q^{-(k+n+1)} \biggl(\zeta_q(1) - \sum_{l=1}^{k} \frac{q^l}{1-q^l} \biggr), \end{aligned}\right. \qquad k = 0, 1, \dots, n,$$

из (73) мы получаем линейную форму

$$\begin{aligned} H_n(q) := (-1)^n q^{(3n+2)(n+1)/2} \sum_{t=0}^{\infty} R_q(t) &= (-1)^n q^{(3n+2)(n+1)/2} \sum_{t=-n}^{\infty} R_q(t) \\ &= A_n(q) \zeta_q(2) - B_n(q) \end{aligned} \tag{74}$$

(коэффициент при $\zeta_q(1)$ в (74) равен нулю согласно предложению 1), где

$$A_n(q)=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^2 q^{k^2-2kn},$$

$$\begin{aligned}B_n(q)&=\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q^2 q^{k^2-2kn}\sum_{l=1}^{k}\frac{q^l}{(1-q^l)^2}\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\j\ne k}}^{n}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\begin{bmatrix}n\\j\end{bmatrix}_q q^{k(k+1)/2+j(j+1)/2-(k+j)n}\\&\quad\times\frac{(-1)^{k+j}}{q^k-q^j}\biggl(q^{-k}\sum_{l=1}^{k}\frac{q^l}{1-q^l}-q^{-j}\sum_{l=1}^{j}\frac{q^l}{1-q^l}\biggr).\end{aligned}$$

Осуществляя теперь предельный переход при $q\to1$, имеем

$$A_n:=\lim_{q\to1}A_n(q)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+n}{k}\binom{n}{k}^2,$$

$$\begin{aligned}B_n:=\lim_{q\to1}(1-q)^2B_n(q)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{k+n}{k}\binom{n}{k}^2\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l^2}\\&\quad+\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{j=0\\j\ne k}}^{n}\binom{k+n}{k}\binom{n}{k}\binom{n}{j}\frac{(-1)^{k+j}}{j-k}\biggl(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l}-\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{l}\biggr).\end{aligned}$$

Остается заметить (см., например, [21; §4]), что последовательность линейных форм

$$H_n:=A_n\zeta(2)-B_n,\qquad n=0,1,2,\dots,$$

есть в точности последовательность Апери [12].

Список литературы

1. *Bézivin J.-P.* Indépendence linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionelles // Manuscripta Math. 1988. V. 61. P. 103–129.
2. *Borwein P.* On the irrationality of $\sum\frac{1}{q^n+r}$ // J. Number Theory. 1991. V. 37. P. 253–259.
3. *Duverney D.* Irrationalité d'un q-analogue de $\zeta(2)$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1995. V. 321. №10. P. 1287–1289.
4. *Нестеренко Ю. В.* Модулярные функции и вопросы трансцендентности // Матем. сб. 1996. Т. 187. №9. С. 65–96.
5. *Нестеренко Ю. В.* О мере алгебраической независимости значений функций Рамануджана // Труды МИАН. 1997. Т. 218. С. 299–334.
6. *Rhin G., Viola C.* On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. 1996. V. 77. №1. P. 23–56.
7. *Rhin G., Viola C.* The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2001. V. 97. №3. P. 269–293.
8. *Nesterenko Yu. V.* Integral identities and constructions of approximations to zeta-values // Actes des 12èmes rencontres arithmétiques de Caen (29–30 juin 2001). J. Théor. Nombres Bordeaux. 2003 (to appear).
9. *Zudilin W.* Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // Preprint `http://arXiv.org/abs/math.NT/0206176` (August 2001).

10. *Bundschuh P., Väänänen K.* Arithmetical investigations of a certain infinite product // Compositio Math. 1994. V. 91. P. 175–199.
11. *Zudilin W.* Remarks on irrationality of q-harmonic series // Manuscripta Math. 2002. V. 107. №4. P. 463–477.
12. *Apéry R.* Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13.
13. *Van Assche W.* Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series // Ramanujan J. 2001. V. 5. №3. P. 295–310.
14. *Гаспер Г., Рахман М.* Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
15. *Прасолов В. В.* Многочлены. Классические направления в математике. М.: МЦНМО, 2001.
16. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.
17. *Mertens F.* Ueber einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie // J. Reine Angew. Math. 1874. V. 77. №4. P. 289–338.
18. *Hardy G. H., Wright E. M.* An introduction to the theory of numbers. Oxford: Oxford Univ. Press, 1979.
19. *Borwein J. M., Borwein P. B.* Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity. Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts. New York: Wiley, 1987.
20. *Данилов Л. В.* Рациональные приближения некоторых функций в рациональных точках // Матем. заметки. 1978. Т. 24. №4. С. 449–458.
21. *Van Assche W.* Approximation theory and analytic number theory // Special functions and differential equations (Madras 1997) / ed. K. Srinivasa Rao et al. New Delhi: Allied Publ., 1998. P. 336–355.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: wadim@ips.ras.ru

Поступила в редакцию
08.11.2001