Математические заметки

В ПЕЧАТЬ ИЮЛЬ 2002

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

О ДИОФАНТОВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ q-ДЗЕТА-ЗНАЧЕНИЙ

В. В. Зудилин

1. Введение. Как обычно, величины, зависящие от числа q и превращающиеся в классические объекты в пределе $q \to 1$ (по крайней мере формально), называются *q-аналогами* или *q-расширениями*. Возможный способ q-расширить значения дзета-функции Римана выглядит следующим образом (здесь $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$):

$$\zeta_q(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\nu^{k-1} q^{\nu}}{1-q^{\nu}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{q^{\nu} \rho_k(q^{\nu})}{(1-q^{\nu})^k}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{1}$$

где $\sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1}$ обозначает сумму степеней делителей, а многочлены $\rho_k(x) \in \mathbb{Z}[x]$ могут быть определены рекурсивно с помощью формул $\rho_1 = 1$ и $\rho_{k+1} = (1+(k-1)x)\rho_k + x(1-x)\rho_k'$ при $k = 1, 2, \dots$ (см. [1, отдел 8, гл. 1, §8, задача 75] для случая $k = 2$). Тогда имеют место предельные соотношения

$$\lim_{\substack{q \to 1 \\ |q|<1}} (1-q)^k \zeta_q(k) = \rho_k(1) \cdot \zeta(k) = (k-1)! \cdot \zeta(k), \qquad k = 2, 3, \dots; \tag{2}$$

равенство $\rho_k(1) = (k-1)!$ доказано в [2, формула (7)]. Определенные таким образом q-дзета-значения (1) приводят к ряду новых интересных задач в теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел, которые являются расширениями соответствующих задач для обычных дзета-значений; мы формулируем их в п. 3 настоящей заметки. Наша ближайшая цель – продемонстрировать, как некоторые недавние достижения в изучении арифметических свойств чисел $\zeta(k)$, $k = 2, 3, \dots$, успешно переносятся на случай q-дзета-значений. Именно, мы имеем в виду гипергеометрическую конструкцию линейных форм (предложенную в работах Е.М. Никишина [3], Л. А. Гутника [4], Ю. В. Нестеренко [5]) и арифметический метод (Г. В. Чудновский [6], Е. А. Рухадзе [7], М. Хата [8]), дополненный групповым подходом (Дж. Рин и К. Виола [9], [10]). В следующем пункте приводятся новые меры иррациональности чисел $\zeta_q(1)$, $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, и отправной точкой является следующая таблица, иллюстрирующая связь между некоторыми объектами и их q-расширениями (здесь $\lfloor \cdot \rfloor$ – целая часть числа и сокращение 'l.c.m.' используется для обозначения наименьшего общего кратного). Мы адресуем читателя к книге [11] и работам [12]–[14], в которых указывается мотивировка и обоснование второго столбца таблицы.

обычные объекты	q-расширения, $p = 1/q \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$
числа $n \in \mathbb{Z}$	'числа' $[n]_p = \dfrac{p^n - 1}{p - 1} \in \mathbb{Z}[p]$
простые $l \in \{2, 3, 5, 7, \dots\} \in \mathbb{Z}$	неприводимые круговые многочлены $\Phi_l(p) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k,l)=1}}^{l} (p - e^{2\pi i k/l}) \in \mathbb{Z}[p]$

обычные объекты	q-расширения, $p=1/q\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\pm1\}$
гамма-функция Эйлера $\Gamma(t)$	q-гамма-функция Джексона $\Gamma_q(t)=\dfrac{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{\nu})}{\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-q^{t+\nu-1})}\,(1-q)^{1-t}$
факториал $n!=\Gamma(n+1)$ $n!=\prod_{\nu=1}^{n}\nu\in\mathbb{Z}$	q-факториал $[n]_q!=\Gamma_q(n+1)$ $[n]_p!=\prod_{\nu=1}^{n}\dfrac{p^{\nu}-1}{p-1}=p^{n(n-1)/2}[n]_q!\in\mathbb{Z}[p]$
$\operatorname{ord}_l n!=\left\lfloor\dfrac{n}{l}\right\rfloor+\left\lfloor\dfrac{n}{l^2}\right\rfloor+\cdots$	$\operatorname{ord}_{\Phi_l(p)}[n]_p!=\left\lfloor\dfrac{n}{l}\right\rfloor,\ l=2,3,4,\dots$
$D_n=\mathrm{l.c.m.}(1,\dots,n)=\prod_{\text{простые } l\leqslant n} l^{\lfloor\log n/\log l\rfloor}\in\mathbb{Z}$	$D_n(p)=\mathrm{l.c.m.}([1]_p,\dots,[n]_p)=\prod_{l=1}^{n}\Phi_l(p)\in\mathbb{Z}[p]$
асимптотический закон распределения простых чисел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log D_n}{n}=1$	формула Мертенса $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log\lvert D_n(p)\rvert}{n^2\log\lvert p\rvert}=\dfrac{3}{\pi^2}$

Если $\psi(x)$ обозначает логарифмическую производную гамма-функции Эйлера и $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ – дробную часть числа x, то в соответствии с формулой Мертенса для любого полуинтервала $[u,v)\subset(0,1)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2\log|p|}\sum_{l:\{n/l\}\in[u,v)}\log|\Phi_l(p)|=\frac{3}{\pi^2}\bigl(\psi'(u)-\psi'(v)\bigr)=\frac{3}{\pi^2}\int_u^v \mathrm{d}\bigl(-\psi'(x)\bigr) \tag{3}$$

(см. [14, лемма 1]), которое можно рассматривать как q-расширение формулы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{\substack{\text{простые } l>\sqrt{Cn}\\ \{n/l\}\in[u,v)}}\log l=\psi(v)-\psi(u)=\int_u^v \mathrm{d}\psi(x)$$

в арифметическом методе [6]–[10].

2. Рациональные приближения к q-дзета-значениям и базисные преобразования. Пусть a_0,a_1,a_2 и b – положительные целые числа, удовлетворяющие условию $a_1+a_2\leqslant b$. Тогда ряд Гейне

$$F(\boldsymbol{a},b)=\frac{\Gamma_q(b-a_2)}{(1-q)\Gamma_q(a_1)}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\Gamma_q(t+a_1)\,\Gamma_q(t+a_2)}{\Gamma_q(t+1)\,\Gamma_q(t+b)}\,q^{a_0t}$$

является $\mathbb{Q}(p)$-линейной формой $F(\boldsymbol{a},b)=A\zeta_q(1)-B$ со свойством

$$p^{-M}D_m(p)\cdot F(\boldsymbol{a},b)\in\mathbb{Z}[p]\zeta_q(1)+\mathbb{Z}[p], \tag{4}$$

где $M=M(\boldsymbol{a},b)$ – некоторое (определяемое явно) целое число и m – максимум 6-элементного множества

$$c_{00}=a_0+a_1+a_2-b-1,\quad c_{01}=a_0-1,\quad c_{11}=a_1-1,\quad c_{21}=a_2-1,$$
$$c_{12}=b-a_1-1,\quad c_{22}=b-a_2-1.$$

Полагая $H(\boldsymbol{c})=F(\boldsymbol{a},b)$ и используя инвариантность величины

$$\frac{F(a_0,a_1,a_2,b)}{\Gamma_q(a_0)\,\Gamma_q(a_2)\,\Gamma_q(b-a_2)}=\frac{H(\boldsymbol{c})}{\Pi_q(\boldsymbol{c})},\qquad \text{где}\ \ \Pi_q(\boldsymbol{c})=[c_{01}]_q!\,[c_{21}]_q!\,[c_{22}]_q!=p^{-N(\boldsymbol{c})}\Pi_p(\boldsymbol{c}),$$

под действием преобразований

$$\begin{aligned} \tau &= (c_{22}\; c_{21}\; c_{01}\; c_{11}\; c_{12}\; c_{00})\colon (a_0, a_1, a_2, b) \mapsto (a_1, b - a_1, a_0, a_0 + a_2), \\ \sigma &= (c_{11}\; c_{21})(c_{12}\; c_{22})\colon \qquad (a_0, a_1, a_2, b) \mapsto (a_0, a_2, a_1, b), \end{aligned}$$

мы приходим к лучшим, чем в (4), включениям

$$p^{-M} D_m(p) \Omega^{-1}(p) \cdot F(\boldsymbol{a}, b) \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(1) + \mathbb{Z}[p] \tag{5}$$

с

$$\Omega(p) = \prod_{l=1}^{m} \Phi_l^{\nu_l}(p), \qquad \nu_l = \max_{\mathfrak{g} \in \langle \tau^2, \sigma \rangle} \operatorname{ord}_{\Phi_l(p)} \frac{\Pi_p(\boldsymbol{c})}{\Pi_p(\mathfrak{g}\boldsymbol{c})}. \tag{6}$$

Кроме того, несложные оценки величины $F(\boldsymbol{a}, b)$ и явные формулы для коэффициента A приводят к соотношениям

$$|F(\boldsymbol{a}, b)| = |p|^{O(b)}, \qquad |A| \leqslant |p|^{(a_0 + a_1 + a_2)b - (a_1^2 + a_2^2 + b^2)/2 + O(b)} \tag{7}$$

с некоторой абсолютной постоянной в $O(b)$.

Отметим, что нетривиальное преобразование τ величины $H(\boldsymbol{c})/\Pi_q(\boldsymbol{c})$ было получено Э. Гейне [15] (в несколько иных обозначениях) еще в 1847 году. Группа преобразований $\mathfrak{G} = \langle \tau, \sigma \rangle$ порядка 12 не имеет обычного аналога, поскольку соответствующие (в пределе $q \to 1$) гауссовы гипергеометрические ряды являются расходящимися. Мы используем группу $\langle \tau^2, \sigma \rangle$ порядка 6 вместо полной группы $\mathfrak{G}$, чтобы обеспечить выполнение условия $a_1 + a_2 \leqslant b$. Наконец, выбирая $a_0 = a_2 = 8n + 1$, $a_1 = 6n + 1$, $b = 15n + 2$ и учитывая (5), (7), (3), мы получаем следующий результат.

Теорема 1. *Для каждого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(1)$ является иррациональным с показателем иррациональности, удовлетворяющим неравенству*

$$\mu(\zeta_q(1)) \leqslant 2.42343562\ldots. \tag{8}$$

Под *показателем иррациональности* $\mu = \mu(\alpha)$ вещественного иррационального числа α мы понимаем наименьшее возможное значение μ такое, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|\alpha - a/b| \leqslant b^{-(\mu+\varepsilon)}$ имеет лишь конечное число решений в целых числах a, b. Оценку (8) можно сравнить с предыдущим результатом $\mu(\zeta_q(1)) \leqslant 2\pi^2/(\pi^2 - 2) = 2.50828476\ldots$, полученным П. Бундшу и К. Ваананеном в [12] и отвечающим выбору $a_0 = a_1 = a_2 = n+1$, $b = 2n+2$ в наших обозначениях.

Аналогичные аргументы с применением более простой группы $\langle \sigma \rangle$ порядка 2 позволяют улучшить оценку $\mu(\log_q(2)) \leqslant 3.36295386\ldots$ У. Ван Аша [13] для следующего q-расширения числа $\log(2)$:

$$\log_q(2) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu-1} q^\nu}{1 - q^\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{q^\nu}{1 + q^\nu}.$$

Именно, в [14] мы получаем неравенство $\mu(\log_q(2)) \leqslant 3.29727451\ldots$ для $q^{-1} = p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$.

В случае чисел $\zeta_q(2)$ рассмотрим положительные параметры $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (a_1, a_2, a_3, b_2, b_3)$, удовлетворяющие условиям $a_j < b_k$ и $a_1 + a_2 + a_3 < b_2 + b_3$, и q-базисный гипергеометрический ряд

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) &= \frac{\Gamma_q(b_2 - a_2)\,\Gamma_q(b_3 - a_3)}{(1-q)^2 \Gamma_q(a_1)} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\Gamma_q(t + a_1)\,\Gamma_q(t + a_2)\,\Gamma_q(t + a_3)}{\Gamma_q(t+1)\,\Gamma_q(t + b_2)\,\Gamma_q(t + b_3)}\, q^{(b_2 + b_3 - a_1 - a_2 - a_3)t} \\ &= \widetilde{A}\zeta_q(2) - \widetilde{B}. \end{aligned}$$

Тогда $p^{-M} D_{m_1}(p) D_{m_2}(p) \cdot \widetilde{F}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[p]$, где $m_1 \geqslant m_2$ – два последовательных максимума 10-элементного множества

$$c_{00} = (b_2 + b_3) - (a_1 + a_2 + a_3) - 1, \qquad c_{jk} = \begin{cases} a_j - 1 & \text{при } k = 1, \\ b_k - a_j - 1 & \text{при } k = 2, 3, \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3,$$

и, кроме того,

$$|\widetilde{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})| = |p|^{O(\max\{b_2,b_3\})}, \qquad |\widetilde{A}| \leqslant |p|^{b_2b_3-(a_1^2+a_2^2+a_3^2)/2+O(\max\{b_2,b_3\})}.$$

Группа перестановок $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{10}$ множества $\boldsymbol{c}$, порожденная всеми перестановками параметров a_1, a_2, a_3, перестановкой b_2, b_3 и перестановкой $(c_{00}\ c_{22})(c_{11}\ c_{33})(c_{13}\ c_{31})$, имеет порядок 120 и известна в связи с доказательством Рина и Виолы [9] новой меры иррациональности для $\zeta(2)$ (см. также [16, §6]). В обозначении $\widetilde{H}(\boldsymbol{c}) = \widetilde{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ величина

$$\frac{\widetilde{H}(\boldsymbol{c})}{[c_{00}]_q!\,[c_{21}]_q!\,[c_{22}]_q!\,[c_{33}]_q!\,[c_{31}]_q!}$$

инвариантна под действием группы $\mathfrak{G}$. Эта $\mathfrak{G}$-инвариантность приводит к включениям

$$p^{-M} D_{m_1}(p) D_{m_2}(p) \widetilde{\Omega}^{-1}(p) \cdot \widetilde{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{Z}[p]\zeta_q(2) + \mathbb{Z}[p]$$

с величиной $\widetilde{\Omega}(p)$, определенной подобно (6). Наконец, полагая $a_1 = 5n+1, a_2 = 6n+1, a_3 = 7n+1$ и $b_2 = 14n+2, b_3 = 15n+2$, мы получаем следующий результат [17].

Теорема 2. *Для каждого $q = 1/p$, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, число $\zeta_q(2)$ является иррациональным с показателем иррациональности, удовлетворяющим неравенству*

$$\mu(\zeta_q(2)) \leqslant 4.07869374\ldots. \tag{9}$$

Количественные оценки типа (9) для $\zeta_q(2)$ ранее не были известны, хотя иррациональность и даже трансцендентность числа $\zeta_q(2)$ для любого алгебраического q с условием $0 < |q| < 1$ следует из теоремы Нестеренко [18].

Отметим, что более простой выбор параметров $a_1 = a_2 = a_3 = n+1, b_2 = b_3 = 2n+2$ также доказывает иррациональность числа $\zeta_q(2)$ для $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, а в пределе $q \to 1$ получаются рациональные приближения Апери [19] к числу $\zeta(2)$.

Хотелось бы подчеркнуть, что использование (кратных) q-интегралов для рядов $F(\boldsymbol{a}, b)$ и $\widetilde{F}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ в изучении арифметических свойств чисел $\zeta_q(1)$, $\zeta_q(2)$ по схеме работ [7]–[10] представляется крайне затруднительным. Причина этому – отсутствие концепции q-аналога замены переменной в q-интеграле (см. [20], [21, §2.2.4]).

3. Общие задачи для q-дзета-значений. Сразу отметим, что для четных $k \geqslant 2$ ряды $E_k(q) = 1 - 2k\zeta_q(k)/B_k$, где $B_k \in \mathbb{Q}$ – числа Бернулли, известны как *ряды Эйзенштейна*. Поэтому модулярное происхождение (относительно параметра $\tau = \frac{\log q}{2\pi i}$) функций $E_4, E_6, E_8, \ldots$ приводит к алгебраической независимости $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ над $\mathbb{Q}[q]$, в то время как остальные четные q-дзета-значения являются многочленами от $\zeta_q(4)$ и $\zeta_q(6)$. В такой интерпретации следствие из теоремы Нестеренко [18] “числа $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$ для алгебраического q, $0 < |q| < 1$” является полным q-расширением следствия из теоремы Линдемана [22] “$\zeta(2) = \pi^2/6$ трансцендентно”. Кроме того, трансцендентность значений функции

$$1 + 4\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu q^{2\nu+1}}{1-q^{2\nu+1}} = \biggl(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2}\biggr)^2 \tag{10}$$

в алгебраических точках q, $0 < |q| < 1$, также следует из теоремы Нестеренко (доказательство тождества Якоби (10) можно найти, например, в [23, теорема 2]); ряд в левой части (10) является q-аналогом ряда

$$4\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{2\nu+1} = \pi.$$

Наилучшая оценка для показателя иррациональности величины (10) в случае $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$ получена в работе [24].

Предельные соотношения (2) и предполагаемая алгебраическая структура обычных дзета-значений мотивируют следующие вопросы (мы также рассматриваем $\zeta_q(1)$ как нечетное q-дзета-значение, хотя соответствующий в пределе $q \to 1$ гармонический ряд является расходящимся).

Задача 1. *Доказать, что q-дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(2), \zeta_q(3), \dots$ как функции от q линейно независимы над $\mathbb{C}(q)$.*

Задача 2. *Доказать, что q-функциональное множество, включающее три четные q-дзета-значения $\zeta_q(2), \zeta_q(4), \zeta_q(6)$ и все нечетные q-дзета-значения $\zeta_q(1), \zeta_q(3), \zeta_q(5), \dots$, состоит из алгебраически независимых над $\mathbb{C}(q)$ функций.*

Отвечающие задачам 1, 2 диофантовы задачи состоят в том, чтобы доказать соответствующие линейную и алгебраическую независимости над полем алгебраических чисел для алгебраических q с $0 < |q| < 1$. В этом направлении даже результаты об иррациональности и линейной независимости q-дзета-значений над $\mathbb{Q}$ в точках $q \in \mathbb{Q}$, $q^{-1} \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, представлялись бы весьма интересными.

Задача несколько иного типа – создать модель кратных q-дзета-значений, включающую q-дзета-значения (1) и обладающую схожими свойствами с моделью кратных дзета-значений [25].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. 3 изд. М.: Наука, 1978. **2**. Kaneko M., Kurokawa N., Wakayama M. A variation of Euler's approach to values of the Riemann zeta function // Preprint (June 2002).. E-print `math.QA/0206171`. **3**. Никишин Е. М. Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ // Матем. сб. 1979. Т. 109 (151). № 3 (7). С. 410–417. **4**. Гутник Л. А. Об иррациональности некоторых величин, содержащих $\zeta(3)$ // Acta Arith. 1983. V. 42. № 3. P. 255–264. **5**. Нестеренко Ю. В. Некоторые замечания о $\zeta(3)$ // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 865–880. **6**. Chudnovsky G. V. On the method of Thue–Siegel // Ann. of Math. (2). 1983. V. 117. № 2. P. 325–382. **7**. Рухадзе Е. А. Оценка снизу приближения ln 2 рациональными числами // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1987. № 6. С. 25–29. **8**. Hata M. Legendre type polynomials and irrationality measures // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 407. № 1. P. 99–125. **9**. Rhin G., Viola C. On a permutation group related to $\zeta(2)$ // Acta Arith. 1996. V. 77. № 1. P. 23–56. **10**. Rhin G., Viola C. The group structure for $\zeta(3)$ // Acta Arith. 2001. V. 97. № 3. P. 269–293. **11**. Гаспер Г., Рахман М. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993. **12**. Bundschuh P., Väänänen K. Arithmetical investigations of a certain infinite product // Compositio Math. 1994. V. 91. P. 175–199. **13**. Van Assche W. Little q-Legendre polynomials and irrationality of certain Lambert series // The Ramanujan J. 2001. V. 5. № 3. P. 295–310. **14**. Zudilin W. Remarks on irrationality of q-harmonic series // Manuscripta Math. 2002. V. 107. № 4. P. 463–477. **15**. Heine E. Untersuchungen über die Reihe ... // J. Reine Angew. Math. 1847. V. 34. P. 285–328. **16**. Zudilin W. Arithmetic of linear forms involving odd zeta values // Preprint (August 2001).. E-print `math.NT/0206176`. **17**. Зудилин В. В. О мере иррациональности q-аналога $\zeta(2)$ // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 8. **18**. Нестеренко Ю. В. Модулярные функции и вопросы трансцендентности // Матем. сб. 1996. Т. 187. № 9. С. 65–96. **19**. Apéry R. Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13. **20**. Askey R. The q-gamma and q-beta functions // Appl. Anal. 1978. V. 8. P. 125–141. **21**. Exton H. q-Hypergeometric Functions and Applications. Ellis Horwood Ser. Math. Appl. Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1983. **22**. Lindemann F. Über die Zalh π // Math. Annalen. 1882. V. 20. P. 213–225. **23**. Andrews G. E., Lewis R., Liu Z.-G. An identity relating a theta function to a sum of Lambert series // Bull. London Math. Soc. 2001. V. 33. P. 25–31. **24**. Matala-aho T., Väänänen K. On approximation measures of q-logarithms // Bull. Austral. Math. Soc. 1998. V. 58. P. 15–31. **25**. Waldschmidt M. Valeurs zêta multiples: une introduction // J. Théorie des Nombres de Bordeaux. 2000. V. 12. P. 581–595.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило
03.06.2002