Математические заметки

том 70 выпуск 3 сентябрь 2001

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ОДНО ИЗ ВОСЬМИ ЧИСЕЛ $\zeta(5),\zeta(7),\dots,\zeta(17),\zeta(19)$ ИРРАЦИОНАЛЬНО

В. В. Зудилин

1. Введение. В 1978 году Р. Апери [1] предъявил последовательность рациональных приближений, доказывающих иррациональность числа $\zeta(3)$. Несмотря на кажущуюся простоту, попытки обобщить результат Апери и доказать иррациональность значений дзета-функции Римана $\zeta(5),\zeta(7),\dots$ так и не увенчались успехом. В 2000 году Т. Ривоалем была предложена конструкция [2], позволяющая строить "хорошие" линейные формы с рациональными коэффициентами от значений дзета-функции $\zeta(s)$ в нечетных положительных точках. Обобщение этой конструкции [3]–[6] приводит к линейным формам от 1 и чисел

$$\zeta(s),\ \zeta(s+2),\ \dots,\ \zeta(s+2m),\qquad \text{где } s\geqslant 3 \text{ нечетно}, \tag{1}$$

и для выбранного надлежащим образом целого $m\geqslant 1$ удается доказать иррациональность по крайней мере одного из набора (1). Как следствие, получается результат об иррациональности одного из чисел $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, …, $\zeta(19)$, $\zeta(21)$; в работах [3] и [4] было предложено два различных доказательства этого утверждения. В настоящей заметке мы доказываем следующий результат.

Теорема 1. *По крайней мере одно из восьми чисел*

$$\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15),\ \zeta(17),\ \zeta(19) \tag{2}$$

иррационально.

Именно *арифметика* является основным отличием приводимой далее конструкции от применявшихся в [4], [3]; *аналитическая часть* – асимптотика линейных форм полностью описана в [4, § 2], поэтому мы ограничимся ссылками на соответствующие утверждения из [4].

Автор искренне благодарен профессору Ю. В. Нестеренко за постоянное внимание к работе.

2. Аналитическая конструкция. Зафиксируем целые положительные параметры a,b,c,d, причем $b\geqslant 3$ нечетно, $a\geqslant bd/c$ четно и $d\geqslant 2c$. Для каждого целого положительного n рассмотрим *нечетную* рациональную функцию

$$\begin{aligned} R_n(t)&=t\cdot\frac{\bigl((t\pm(cn+1))\cdots(t\pm(cn\pm dn))\bigr)^b}{\bigl(t(t\pm1)\cdots(t\pm cn)\bigr)^a}\cdot\frac{(2cn)!^a}{(dn)!^{2b}}\\ &=t\cdot\frac{\Gamma(t+(c+d)n+1)^b\Gamma(t-cn)^{a+b}}{\Gamma(t-(c+d)n)^b\Gamma(t+cn+1)^{a+b}}\cdot\frac{(2cn)!^a}{(dn)!^{2b}}\\ &=(-1)^{(c+d)n}\frac{\sin^b\pi t}{\pi^b}\cdot\frac{t(\pm t+(c+d)n)^b(2cn)^a}{(t+cn)^{a+b}(dn)^{2b}}\cdot\frac{\Gamma(\pm t+(c+d)n)^b\Gamma(t-cn)^{a+b}\Gamma(2cn)^a}{\Gamma(t+cn)^{a+b}\Gamma(dn)^{2b}} \end{aligned} \tag{3}$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № IR-97-1904.

и поставим ей в соответствие число

$$I_n = \frac{1}{(b-1)!} \sum_{t=cn+1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}^{b-1} R(t)}{\mathrm{d}t^{b-1}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t \cdot R_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

где M – произвольная постоянная из интервала $cn < M < (c+d)n$ и

$$\operatorname{ctg}_b z = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!} \frac{\mathrm{d}^{b-1} \operatorname{ctg} z}{\mathrm{d}z^{b-1}}, \qquad b = 1, 2, \dots$$

(см. [4, лемма 2.4]). Как несложно убедиться, число I_n является линейной формой от

$$1,\ \zeta(b+2),\ \zeta(b+4),\ \dots,\ \zeta(a+b-2) \tag{4}$$

с рациональными коэффициентами (см. [4, лемма 1.1]).

Полагая $r = d/(2c)$, заменяя множитель $(dn)!^{2b}$ на $(2cn)!^{bd/c}$ в определении функции $R_n(t)$ и cn на n, мы получаем линейные формы I_n из [4] от чисел (4) (для четного a и нечетного b). Единственное отличие по сравнению с [4] – появление дополнительного множителя t в (3) – дает возможность рассматривать числа a, b различной четности (и этот трюк мы заимствуем из [3]), но не влияет на асимптотику величин I_n при $n \to \infty$. Поэтому мы можем воспользоваться предложением 2.3 из [4].

Лемма 1. *Пусть для вещественного корня $\mu_1 \in (c+d, +\infty)$ многочлена*

$$(\tau + c + d)^b (\tau - c)^{a+b} - (\tau - c - d)^b (\tau + c)^{a+b} \tag{5}$$

выполнено неравенство

$$\mu_1 \leqslant c + d + (2c+d)d \cdot \min\left\{ \frac{b}{8c(a+b)}, \frac{1}{12(c+d)} \right\},$$

а τ_0 – комплексный корень (5) в области $\operatorname{Re}\tau > 0$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ с максимально возможной частью $\operatorname{Re}\tau_0$. Пусть, далее, функция

$$\begin{aligned} f_0(\tau) &= b(c+d)\log(\tau + c + d) + b(c+d)\log(-\tau + c + d) \\ &\quad - (a+b)c\log(\tau - c) - (a+b)c\log(\tau + c) + 2ac\log(2c) - 2bd\log d \end{aligned}$$

удовлетворяет условию

$$\operatorname{Im} f_0(\tau_0) \not\equiv 0 \pmod{\pi\mathbb{Z}}.$$

Тогда

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|I_n|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\tau_0).$$

3. Знаменатели линейных форм. Для изучения арифметических свойств линейных форм I_n представим функцию (3) в виде $R_n(t) = tH_n(t)^a G_n(t)^b$, где

$$H_n(t) = \frac{(2cn)!}{t(t\pm 1)\cdots(t\pm cn)}, \qquad G_n(t) = \frac{(t\pm(cn+1))\cdots(t\pm(cn+dn))}{(dn)!^2}.$$

Следующее утверждение обобщает арифметическую схему Никишина–Ривоаля.

Лемма 2 [4, лемма 4.1]. *Пусть для некоторого многочлена $P(t)$, $\deg P(t) < m(n+1)$, рациональная функция*

$$R(t) = \frac{P(t)}{\bigl((t+s)(t+s+1)\cdots(t+s+n)\bigr)^m}$$

(в не обязательно несократимом представлении) при каждом $j = 0, 1, \dots, m-1$ удовлетворяет включениям

$$\frac{D_n^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \bigl(R(t)(t+k)^m\bigr)\Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \qquad k = s, s+1, \dots, s+n, \tag{6}$$

где D_n – наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \ldots, n$. Тогда включения (6) выполнены для всех целых неотрицательных j.

Из леммы 2 следует, что для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\frac{D_{2cn}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(H_n(t)(t+k)\bigr)\Big|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=0,\pm1,\ldots,\pm cn. \tag{7}$$

Кроме того, из свойств целозначных многочленов (см., например, [7])

$$\frac{(t+(cn+1))\cdots(t+(cn+dn))}{(dn)!},\qquad \frac{(t-(cn+1))\cdots(t-(cn+dn))}{(dn)!}$$

и правила Лейбница для дифференцирования произведения вытекают включения

$$\frac{D_{dn}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}G_n(t)\Big|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=0,\pm1,\pm2,\ldots\,. \tag{8}$$

Лемма 3 (ср. с [4, лемма 4.5]). *Для каждого простого p определим показатели*

$$\nu_p=\min_{k=0,\pm1,\ldots,\pm cn}\left\{\operatorname{ord}_p\frac{((c+d)n+k)!\,((c+d)n-k)!}{(cn+k)!\,(cn-k)!\,(dn)!^2}\right\} \tag{9}$$

и положим

$$\Pi_n=\prod_{p:\sqrt{(2c+d)n}<p\leqslant dn}p^{\nu_p}. \tag{10}$$

Тогда для всех целых неотрицательных j выполнено

$$\Pi_n^{-1}\cdot D_{dn}^j\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}G_n(t)\Big|_{t=-k}\in\mathbb{Z},\qquad k=0,\pm1,\ldots,\pm cn. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку

$$G_n(t)\big|_{t=-k}=(-1)^{dn}\frac{((c+d)n+k)!\,((c+d)n-k)!}{(cn+k)!\,(cn-k)!\,(dn)!^2},\qquad k=0,\pm1,\ldots,\pm cn,$$

включения (11) при $j=0$ следуют из (9), (10).

Докажем индукцией по j, что для любого простого p

$$\operatorname{ord}_p\left(\Pi_n^{-1}\cdot D_{dn}^j\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}G_n(t)\Big|_{t=-k}\right)\geqslant 0,\qquad k=0,\pm1,\ldots,\pm cn. \tag{12}$$

Покажем оценки (12) для $j+1$, считая их доказанными для всех предыдущих j. Если простое p не делит Π_n, то $\operatorname{ord}_p\Pi_n^{-1}=0$ и соотношения (12) следуют из (8). Поэтому далее мы считаем p делителем Π_n, откуда, в частности, $p>\sqrt{(2c+d)n}$ и $p\leqslant dn$. Полагая

$$g_n(t)=\frac{G_n'(t)}{G_n(t)}=\sum_{l=cn+1}^{cn+dn}\frac{1}{t\pm l},$$

получим

$$\frac{\mathrm{d}^{j+1}G_n(t)}{\mathrm{d}t^{j+1}}=\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(g_n(t)G_n(t)\bigr)=\sum_{m=0}^{j}\binom{m}{j}\cdot\frac{\mathrm{d}^{j-m}g_n(t)}{\mathrm{d}t^{j-m}}\cdot\frac{\mathrm{d}^mG_n(t)}{\mathrm{d}t^m}. \tag{13}$$

Для $m \leqslant j$ имеем

$$\operatorname{ord}_p\biggl(\frac{\mathrm{d}^{j-m}g_n(t)}{\mathrm{d}t^{j-m}}\bigg|_{t=-k}\biggr)=\operatorname{ord}_p\biggl(\sum_{l=cn+1}^{cn+dn}\frac{1}{(l\pm k)^{j-m+1}}\biggr)\geqslant -(j-m+1), \qquad k=0,\pm 1,\dots,\pm cn, \tag{14}$$

поскольку $p>\sqrt{(2c+d)n}$ и $|l\pm k|\leqslant (2c+d)n$ для всех знаменателей в (14);

$$\operatorname{ord}_p D_{dn}^{j-m+1}\geqslant j-m+1, \tag{15}$$

так как $p\leqslant dn$; наконец,

$$\operatorname{ord}_p\biggl(\Pi_n^{-1}\cdot D_{dn}^m\cdot\frac{\mathrm{d}^m G_n(t)}{\mathrm{d}t^m}\bigg|_{t=-k}\biggr)\geqslant 0, \qquad k=0,\pm 1,\dots,\pm cn, \tag{16}$$

по индукционному предположению. Подставляя $t=-k$ в (13) и применяя оценки (14)–(16), заключаем, что оценки (12) выполнены для $j+1$. Тем самым, индукционный переход полностью обоснован. Лемма доказана.

Положим $a_0=\lceil bd/c\rceil\geqslant bd/c$. Из леммы 3, включений (7) и правила Лейбница ввиду $d\geqslant 2c$ для всех целых неотрицательных j получаем

$$\Pi_n^{-b}\cdot D_{dn}^j\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(G_n(t)^b\cdot H_n(t)^{a_0}(t+k)^{a_0}\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z}, \qquad k=0,\pm 1,\dots,\pm cn.$$

Отсюда, в частности, для $j=0,1,\dots,a_0-1$ выполнено

$$a_0!\,\Pi_n^{-b}\cdot\biggl(\frac{D_{dn}}{D_{2cn}}\biggr)^{a_0-1}\cdot\frac{D_{2cn}^j}{j!}\,\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\bigl(G_n(t)^b\cdot H_n(t)^{a_0}(t+k)^{a_0}\bigr)\bigg|_{t=-k}\in\mathbb{Z}, \qquad k=0,\pm 1,\dots,\pm cn. \tag{17}$$

Согласно лемме 2 включения (17) справедливы для всех целых неотрицательных j, поскольку $\deg G_n(t)^b=2bdn<a_0(2cn+1)=\deg H_n(t)^{a_0}$. Поэтому стандартные рассуждения (см., например, [4, лемма 1.4] или [3, лемма 2]) приводят нас к следующему утверждению.

Лемма 4. *Числа*

$$\tilde I_n=a_0!\,\Pi_n^{-b}\cdot D_{dn}^{a_0-1}\cdot D_{2cn}^{a+b-a_0}\cdot I_n \tag{18}$$

являются линейными формами от (4) *с целыми коэффициентами.*

Асимптотика величин D_{dn} и D_{2cn} в (18) при $n\to\infty$ определяется из асимптотического закона распределения простых чисел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_n}{n}=1. \tag{19}$$

Для вычисления асимптотического поведения величины Π_n при $n\to\infty$ отметим, что согласно (9) для простых $p>\sqrt{(2b+c)n}$

$$\nu_p\geqslant\varphi\biggl(\frac{n}{p}\biggr)=\varphi\biggl(\frac{n}{p}-\biggl\lfloor\frac{n}{p}\biggr\rfloor\biggr), \tag{20}$$

где

$$\varphi(x)=\min_{y\in\mathbb{R}}\bigl\{\lfloor (c+d)x+y\rfloor+\lfloor (c+d)x-y\rfloor-\lfloor cx+y\rfloor-\lfloor cx-y\rfloor-2\lfloor dx\rfloor\bigr\}. \tag{21}$$

Функция под зна́ком минимума в (21) периодична (с периодом 1) по каждому аргументу, поэтому минимум можно считать только для $y\in[0,1)$. Используя аргументы Чудновского–Хаты, согласно (10), (20), (19) мы в итоге получаем

$$\varpi=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\Pi_n}{n}\geqslant\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}\psi(x)-\int_0^{1/d}\varphi(x)\,\frac{\mathrm{d}x}{x^2} \tag{22}$$

(см. [4, лемма 4.4 и доказательство леммы 4.5]), где $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции и вычитание в правой части (22) “ликвидирует” простые $p>dn$.

4. Доказательство теоремы 1. Для того чтобы получить объявленный в названии результат, мы полагаем $a=18$, $b=3$, $c=3$ и $d=7$. Тогда $a_0=\lceil bd/c\rceil=7$,

$$\mu_1\approx 10.305445,\qquad \tau_0\approx 9.856603+0.197639i,\qquad f_0(\tau_0)\approx -123.071169-30.779083i.$$

Функция (21) при $x\in[0,1)$ в этом случае имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in\bigl[\frac{1}{10},\frac{1}{7}\bigr)\cup\bigl[\frac{1}{4},\frac{2}{7}\bigr)\cup\bigl[\frac{2}{5},\frac{3}{7}\bigr)\cup\bigl[\frac{11}{20},\frac{4}{7}\bigr)\cup\bigl[\frac{13}{20},\frac{2}{3}\bigr)\\ & \qquad\cup\bigl[\frac{7}{10},\frac{5}{7}\bigr)\cup\bigl[\frac{4}{5},\frac{5}{6}\bigr)\cup\bigl[\frac{17}{20},\frac{6}{7}\bigr)\cup\bigl[\frac{19}{20},1\bigr),\\ 0 & \text{для остальных } x\in[0,1);\end{cases}$$

поэтому $\varpi\geqslant 1.150969$ в соответствии с (22). Окончательно, для линейных форм (18) с целыми коэффициентами от 1 и чисел (2) согласно леммам 1 и 4 имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\log|\tilde I_n|}{n}=-b\varpi+(a_0-1)d+2(a+b-a_0)c+\operatorname{Re}f_0(\tau_0)<-0.524077,$$

так что среди чисел (2) действительно имеется иррациональное.

5. Другие результаты об иррациональности. Описанная в этой заметке конструкция позволяет также доказать иррациональность одного из чисел в (1) для $s=7$ и $s=9$ с меньшим значением m, чем в теореме 1 из [4]–[6]. Действительно, полагая

$$a=32,\ b=5,\ c=5,\ d=12\quad\text{и}\quad a=46,\ b=7,\ c=1,\ d=2,$$

мы получаем следующие результаты.

Теорема 2. *По крайней мере одно из пятнадцати чисел*

$$\zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \dots,\ \zeta(33),\ \zeta(35)$$

иррационально.

Теорема 3. *По крайней мере одно из (двадцати двух) чисел*

$$\zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \dots,\ \zeta(49),\ \zeta(51)$$

иррационально.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Apéry R. // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13. 2. Rivoal T. // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270. 3. Rivoal T. Irrationalité d'au moins un des neuf nombres $\zeta(5),\zeta(7),\dots,\zeta(21)$ // Acta Arith. 2001 (to appear); // E-print `math.NT/0104221`. 4. Зудилин В. В. Об иррациональности значений дзета-функции Римана // Изв. РАН. Сер. матем. 2001 (в печати). 5. Зудилин В. В. // УМН. 2001. Т. 56. № 2. С. 215–216. 6. Зудилин В. В. Об иррациональности значений дзета-функции // Материалы XXIII конференции молодых ученых (МГУ, 9–14 апреля 2001 г.). М.: МГУ, 2001 (в печати); // E-print `math.NT/0104249`. 7. Матвеев Е. М. // Матем. заметки. 1993. Т. 54. № 4. С. 76–81.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Поступило
03.05.2001