ОБ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ ЗНАЧЕНИЙ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ В НЕЧЕТНЫХ ТОЧКАХ

В. В. Зудилин

В настоящее время известно лишь несколько результатов об арифметической природе значений дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в нечетных точках $s > 1$. Первый из них – иррациональность $\zeta(3)$ – получил Р. Апери в 1978 г. [1], а последний принадлежит Т. Ривоалю [2], доказавшему в 2000 г. асимптотическую оценку размерности $\delta(a)$ пространств, натянутых над $\mathbb{Q}$ на числа $1,\zeta(3),\zeta(5),\dots,\zeta(a-2),\zeta(a)$, где a нечетно:

$$\delta(a) \geqslant \frac{\log a}{1+\log 2}\bigl(1+o(1)\bigr) \qquad \text{при } a\to\infty. \tag{1}$$

В частности, из (1) следует бесконечность множества иррациональных чисел среди $\zeta(3),\zeta(5),\dots$. Обобщая конструкцию Ривоаля [2], мы доказываем следующие результаты.

Теорема 1. *В каждом числовом наборе*

$$\begin{gathered} \{\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15),\ \zeta(17),\ \zeta(19),\ \zeta(21)\}, \\ \{\zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \dots,\ \zeta(35),\ \zeta(37)\}, \\ \{\zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \dots,\ \zeta(51),\ \zeta(53)\} \end{gathered} \tag{2}$$

имеется по крайней мере одно иррациональное число.

Теорема 2. *Существует нечетное число $a \leqslant 145$ такое, что числа $1,\zeta(3),\zeta(a)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Теорема 2 усиливает соответствующий результат работы [3]: $a \leqslant 145$ вместо $a \leqslant 169$.

Теорема 3. *Для каждого нечетного $a \geqslant 3$ справедлива абсолютная оценка*

$$\delta(a) > 0.395\,\log a > \frac{2}{3}\cdot\frac{\log a}{1+\log 2}\,.$$

Зафиксируем положительные нечетные параметры a,b,c, причем $a > b(c-1)$ и $c \geqslant 3$, и для каждого положительного n рассмотрим рациональную функцию

$$\begin{aligned} R(t) = R_n(t) &:= \frac{\bigl((t\pm(n+1))\cdots(t\pm cn)\bigr)^b}{\bigl(t(t\pm1)\cdots(t\pm n)\bigr)^a}\cdot(2n)!^{a+b-bc} \\ &= (-1)^n\biggl(\frac{\Gamma(\pm t+cn+1)}{\Gamma(\pm t+n+1)}\biggr)^b\cdot\biggl(\frac{\Gamma(t)\Gamma(1-t)}{\Gamma(\pm t+n+1)}\biggr)^a\cdot(2n)!^{a+b-bc}, \end{aligned} \tag{3}$$

где знак '$\pm$' означает, что в соответствующем произведении появляются множители, отвечающие как знаку '$+$', так и '$-$'. Представляя функцию (3) в виде суммы простейших дробей и используя ее нечетность и поведение при $t\to\infty$, заключаем, что

$$I = I_n := \sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{1}{(b-1)!}\frac{\mathrm{d}^{b-1}R(t)}{\mathrm{d}t^{b-1}} = \sum_{\substack{s \text{ нечетно}\\ b<s<a+b}} A_s\zeta(s) - A_0, \tag{4}$$

где коэффициенты $A_s = A_{s,n}$ линейной формы I – некоторые рациональные числа. (При $b=1$, $c=2r+1$ мы получаем те же линейные формы (4), что и в работе [2].) Обозначим через D_n наименьшее общее кратное чисел $1,2,\dots,n$; при этом, как хорошо известно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_n}{n} = 1.$$

Работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № IR-97-1904).

Лемма 1. *Для каждого нечетного $c \geqslant 3$ существует последовательность целых $\Pi_n = \Pi_n^{(c)} \geqslant 1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что числа $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1} A_{s,n}$ являются целыми и справедливо предельное соотношение*

$$\varpi_c := \lim_{n\to\infty} \frac{\log \Pi_n^{(c)}}{n} = -\sum_{l=1}^{(c-1)/2} \left(2\psi\left(\frac{2l}{c-1}\right) + 2\psi\left(\frac{2l}{c}\right) + \frac{2c-1}{l}\right) + 2(c-1)(1-\gamma), \quad (5)$$

где $\gamma \approx 0.57712$ – постоянная Эйлера, а $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции. (При $c \to \infty$ величина ϖ_c в (5) имеет порядок $2c(1-\gamma) + O(\log c)$.)

Лемма 1 усиливает соответствующие оценки знаменателей линейных форм (4) за счет появления множителя Π_n^{-b} даже в случае $b = 1$, рассмотренном в работе [2]. Это обстоятельство является ключевым при выводе теорем 2, 3.

Доказательство следующего утверждения опирается на представление форм (4) в виде контурных интегралов и применение метода перевала (ср. с [4], [5]). В случае $b > 1$ на параметры a, b, c накладываются дополнительные ограничения, которые оказываются автоматически выполненными в приложении к теореме 1.

Лемма 2. *Для линейных форм (4) справедливо предельное соотношение*

$$\varkappa := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log |I_n|}{n} = \log \frac{2^{2(a+b-bc)} |\tau_0 + c|^{bc} |\tau_0 - c|^{bc}}{|\tau_0 + 1|^{a+b} |\tau_0 - 1|^{a+b}}, \quad (6)$$

где τ_0 – вещественный корень многочлена $(\tau + c)^b (\tau - 1)^{a+b} - (\tau - c)^b (\tau + 1)^{a+b}$ из интервала $(c, +\infty)$ в случае $b = 1$ и один из пары комплексно-сопряженных корней с максимально возможной частью $\operatorname{Re}\tau_0$ в случае $b > 1$. (Для $b = 1$ верхний предел в (6) можно заменить на обычный, при этом величина $\varkappa$ в (6) не превосходит $(2a - c + 3)\log 2 - 2(a - c + 1)\log c$.)

Согласно леммам 1, 2 в случае $-b\varpi_c + 2(a + b - 1) + \varkappa < 0$ среди чисел $\zeta(s)$, где s нечетно и $b < s < a + b$, имеется по крайней мере одно иррациональное. Выбирая $a = 19$, $b = 3$, $c = 3$; $a = 33$, $b = 5$, $c = 3$ и $a = 47$, $b = 7$, $c = 3$ соответственно для каждого из наборов в (2), получаем теорему 1.

Лемма 3. *Для ненулевых коэффициентов $A_s = A_{s,n}$ линейных форм (4) справедлива оценка*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log |A_{s,n}|}{n} \leqslant 2bc \log c + 2(a + b - bc) \log 2.$$

Теоремы 2, 3 выводятся из лемм 1–3 с помощью критерия линейной независимости из [6] так же, как и в [2]. Для доказательства теоремы 2 ($a = 145$, $b = 1$) мы выбираем $c = 21$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[**1**] R. Apéry // Astérisque. 1979. V. 61. P. 11–13. [**2**] T. Rivoal // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math. 2000. V. 331. № 4. P. 267–270. [**3**] T. Rivoal // Rapport de recherche SDAD № 2000-9. Univ. Caen, 2000. [**4**] Ю. В. Нестеренко // Матем. заметки. 1996. Т. 59. № 6. С. 865–880. [**5**] Т. Г. Хессами Пилеруд. Арифметические свойства значений гипергеометрических функций // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1999. [**6**] Ю. В. Нестеренко // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1985. № 1. С. 46–54.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `wadim@ips.ras.ru`

Принято редколлегией
28.03.2001