IRRATIONALITY OF VALUES OF ZETA-FUNCTION

W. Zudilin

1. Introduction. The irrationality of values of the zeta-function $\zeta(s)$ at odd integers $s \ge 3$ is one of the most attractive problems in number theory. Inspite of a deceptive simplicity and more than two-hundred-year history of the problem, all done in this direction can easily be counted. It was only 1978, when Apéry [A] obtained the irrationality of $\zeta(3)$ by a presentation of "nice" rational approximations to this number. During next years the phenomenon of Apéry's sequence was recomprehended more than once from positions of different analytic methods (see [N2] and the bibliography cited there); new approaches gave rise to improve Apéry's result *quantitatively*, i.e., to get a "sharp" irrationality measure of $\zeta(3)$ (last stages in this direction are the articles [H2], [RV]). Finally, in 2000 Rivoal [R1] constructed linear forms with rational coefficients involving values of $\zeta(s)$ only at odd integers $s > 1$ and proved that *there exist infinitely many irrational numbers among* $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$; *more precisely*, *for the dimension* $\delta(a)$ *of spaces spanned over* $\mathbb{Q}$ *by* $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a-2), \zeta(a)$, *where* a *is odd*, *there holds the estimate*

$$\delta(a) \ge \frac{\log a}{1 + \log 2}\bigl(1 + o(1)\bigr) \qquad \text{as } a \to \infty.$$

2. Main results. In this note we generalize Rivoal's construction [R1] and prove the following results.

Theorem 1. *Each of the following collections*

$$\begin{gathered} \{\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15),\ \zeta(17),\ \zeta(19),\ \zeta(21)\}, \\ \{\zeta(7),\ \zeta(9),\ \dots,\ \zeta(35),\ \zeta(37)\}, \qquad \{\zeta(9),\ \zeta(11),\ \dots,\ \zeta(51),\ \zeta(53)\} \end{gathered} \tag{1}$$

contains at least one irrational number.[1]

Theorem 2. *For each odd integer* $b \ge 1$ *the collection*

$$\zeta(b+2),\ \zeta(b+4),\ \dots,\ \zeta(8b-3),\ \zeta(8b-1)$$

contains at least one irrational number.

Theorem 3. *There exist odd integers* $a_1 \le 145$ *and* $a_2 \le 1971$ *such that the numbers* $1, \zeta(3), \zeta(a_1), \zeta(a_2)$ *are linearly independent over* $\mathbb{Q}$.

Theorem 3 improves corresponding result from [R2], where the linear independence of numbers $1, \zeta(3), \zeta(a)$ was established for some $a \le 169$.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 11J72; Secondary 33C60.

[1] After finishing this paper the author knew that Rivoal [R3] had independently obtained the claim of Theorem 1 for the first collection in (1) by another generalization of his construction from [R1].

Theorem 4. *For each odd integer $a \ge 3$ there holds the absolute estimate*

$$\delta(a) > 0.395\,\log a > \frac{2}{3}\cdot\frac{\log a}{1+\log 2}. \tag{2}$$

We stress that our proofs of Theorems 1–4 exploit calculations via the saddle point method (Section 4) and ideologically leans on the works [N2], [He]. An improvelment of arithmetic estimates (i.e., of denominators of numerical linear forms) in the spirit of [H2], [RV] (Section 3) allows us to sharpen the lower estimate of $\delta(a)$ in Theorems 3, 4 for small values of a. In Section 5 we obtain not only an upper bound but also precise asymptotics of coefficients of linear forms. Finally, we prove Theorems 1–4 in Section 6.

The main results of the work were announced in the communication [Z].

The author is grateful to Professor Yu. V. Nesterenko for his permanent attention to the work. This research was carried out with the partial support of the INTAS–RFBR grant no. IR-97-1904.

3. Analytic construction. We fix positive odd parameters a, b, c such that $c \ge 3$, $a > b(c-1)$, and for each positive integer n consider the rational function

$$\begin{aligned} R(t) = R_n(t) &:= \frac{\big((t\pm(n+1))\cdots(t\pm cn)\big)^b}{\big(t(t\pm 1)\cdots(t\pm n)\big)^a}\cdot(2n)!^{a+b-bc} \\ &= (-1)^n\cdot\left(\frac{\sin\pi t}{\pi}\right)^b\cdot\frac{\Gamma(\pm t+cn+1)^b\Gamma(t-n)^{a+b}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}}\cdot(2n)!^{a+b-bc}, \end{aligned} \tag{3}$$

where the record '$\pm$' means that the product contains factors corresponding both to a sign '+' and to a '−'. To the function (3) assign the infinite sum

$$I = I_n := \sum_{t=n+1}^{\infty}\frac{1}{(b-1)!}\frac{\mathrm{d}^{b-1}R(t)}{\mathrm{d}t^{b-1}}; \tag{4}$$

the series on the right-hand side of (4) converges absolutely since $R(t) = O(t^{-2})$ as $t \to \infty$. Decomposing the function (3) in a sum of partial fractions and using its oddness, we deduce that

$$I = \sum_{\substack{s \text{ is odd} \\ b<s<a+b}} A_s\zeta(s) - A_0 \tag{5}$$

(see (10) below), where denominators of the rational numbers $A_s = A_{s,n}$ grow not faster than exponentially (cf. [R1], lemmes 1, 5). By D_n denote the least common multiple of numbers $1, 2, \dots, n$; the prime number theorem yields

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log D_n}{n} = 1.$$

Lemma 1. *For each odd integer $c \ge 3$ there exists a sequence of integers $\Pi_n = \Pi_{n,c} \ge 1$, $n = 1, 2, \dots$, such that the numbers $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1} A_{s,n}$ are integral and the limit relation*

$$\varpi_c := \lim_{n\to\infty} \frac{\log \Pi_{n,c}}{n} = -\sum_{l=1}^{(c-1)/2} \left(2\psi\left(\frac{2l}{c-1}\right) + 2\psi\left(\frac{2l}{c}\right) + \frac{2c-1}{l}\right) + 2(c-1)(1-\gamma) \tag{6}$$

holds; here $\gamma \approx 0.57712$ is Euler's constant and $\psi(x)$ is the logarithmic derivative of the gamma-function.

Proof. Let

$$\Pi_n = \prod_{\sqrt{(c+1)n} < p \le 2n} p^{\nu_p}, \qquad \text{where} \quad \nu_p = \min_{k=0,\pm1,\dots,\pm n} \left\{ \operatorname{ord}_p \frac{(cn+k)!\,(cn-k)!}{(n+k)!^c (n-k)!^c} \right\}. \tag{7}$$

Then for rational functions

$$G(t) = G_n(t) := \frac{(t \pm (n+1)) \cdots (t \pm cn)}{\big(t(t\pm 1)\cdots(t\pm n)\big)^{c-1}}, \qquad H(t) = H_n(t) := \frac{(2n)!}{t(t\pm1)\cdots(t\pm n)}$$

we have the inclusions

$$\Pi_n^{-1} \cdot \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\big(G(t)(t+k)^{c-1}\big)\Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\big(H(t)(t+k)\big)\Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \qquad k = 0, \pm1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, 2, \dots \tag{8}$$

(a proof of the inclusions (8) for the function $G(t)$ needs a certain generalization of the arithmetic scheme of Nikishin–Rivoal). Now, representing the initial function (3) in the form $R(t) = G(t)^b H(t)^{a+b-bc}$ and applying Leibniz's rule for the differentiation of a product, by (8) we obtain

$$\Pi_n^{-b} D_{2n}^j B_{k,j} \in \mathbb{Z}, \qquad \text{where} \quad B_{k,j} = \frac{1}{j!}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j}\big(R(t)(t+k)^a\big)\Big|_{t=-k}, \qquad k = 0, \pm1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, \dots, a-1. \tag{9}$$

These relations yield the desired inclusions $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1} A_s \in \mathbb{Z}$ since

$$A_s = (-1)^{b-1} \binom{s-1}{b-1} \sum_{k=-n}^{n} B_{k,a+b-s-1}, \qquad s \text{ is odd}, \quad b < s < a+b,$$
$$A_0 = (-1)^{b-1} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=1}^{k+n} \left(\binom{a+b-2}{b-1} \frac{B_{k,0}}{l^{a+b-1}} + \dots + \binom{b}{b-1} \frac{B_{k,a-2}}{l^{b+1}} + \frac{B_{k,a-1}}{l^b} \right). \tag{10}$$

By (7), for each prime number $p > \sqrt{(c+1)n}$ there holds

$$\nu_p = \min_{|k|\le n} \varphi_c\left(\frac{n}{p}, \frac{k}{p}\right),$$

where the function $\varphi_c(x,y)=\lfloor cx+y\rfloor+\lfloor cx-y\rfloor-c\lfloor x+y\rfloor-c\lfloor x-y\rfloor$ is periodic (of period 1) with respect to each of its arguments, and $\lfloor\cdot\rfloor$ is the integral part of a number. Direct calculations show us that

$$\min_{y\in\mathbb{R}}\varphi_c(x,y)=\begin{cases} 2l-2 & \text{if } x-\lfloor x\rfloor\in\left[\dfrac{l-1}{c-1},\dfrac{l}{c}\right)\cup\left[\dfrac12+\dfrac{l-1}{c-1},\dfrac12+\dfrac{l}{c}\right), \\ 2l-1 & \text{if } x-\lfloor x\rfloor\in\left[\dfrac{l}{c},\dfrac{l}{c-1}\right)\cup\left[\dfrac12+\dfrac{l}{c},\dfrac12+\dfrac{l}{c-1}\right), \end{cases}$$
$$l=1,2,\dots,\frac{c-1}{2}.$$

Now, applying the number prime theorem and following arguments from [Ch], Theorem 4.3 and Section 6; [H1], Lemma 3.2, we obtain the limit relation (6). This completes the proof.

It can easily be checked that the value ϖ_c in (6) behaves itself like $2c(1-\gamma)+O(\log c)$ as $c\to\infty$.

4. Asymptotics of linear forms. Consider the functions

$$\cot_b z=\frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{b-1}\cot z}{\mathrm{d}z^{b-1}},\qquad b=1,2,\dots\,.$$

Decomposing $\pi\cot\pi t$ in a sum of partial fractions we see that for each integer $b\ge1$

$$\pi^b\cot_b\pi t=\frac{1}{(t-k)^b}+O(1)\tag{11}$$

in a neighbourhood of $t=k\in\mathbb{Z}$.

Lemma 2. *For the value* (4) *there holds the integral presentation*

$$I=-\frac{1}{2\pi i}\int_{M-i\infty}^{M+i\infty}\pi^b\cot_b\pi t\cdot R(t)\,\mathrm{d}t,\tag{12}$$

where $M\in\mathbb{R}$ is an arbitrary positive constant from the interval $n<M<cn$.

Proof. Consider the integrand in (12) on a rectangle $\mathcal{P}$ with vertices $M\pm iN$, $N+\frac12\pm iN$, where an integer N is sufficiently large, $N>cn$. Expanding the function (3) in Taylor series in a neighbourhood of $t=k\in\mathbb{Z}$ and using the expansion (11) by Cauchy's theorem we obtain

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{P}}\pi^b\cot_b\pi t\cdot R(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{M<k\le N}\operatorname{Res}_{t=k}\bigl(\pi^b\cot_b\pi t\cdot R(t)\bigr)=\sum_{M<k\le N}\frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!}.\tag{13}$$

On the sides $[N+\frac12-iN,N+\frac12+iN]$, $[M-iN,N+\frac12-iN]$, and $[N+\frac12+iN,M+iN]$ of the rectangle $\mathcal{P}$ there holds the relation $R(t)=O(N^{-2})$, while the function $\cot_b\pi t$, which is a polynomial in $\cot\pi t$, is bounded. Hence, tending N to ∞ in (13) we get the desired presentation (12).

Our next claim follows from Lemma 2 after the change of variables $t=n\tau$ and an application of Stirling's formula to gamma-factors of the function (3).

LEMMA 3. *For the sum* (4) *there holds the asymptotic relation*

$$I = \tilde{I} \cdot \frac{(-1)^n (2\sqrt{\pi n}\,)^{a+b-bc} (2\pi)^b}{n^{a-1}} \cdot \bigl(1 + O(n^{-1})\bigr) \qquad \textit{as } n \to \infty,$$

where

$$\tilde{I} = \tilde{I}_n := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{M}} \sin^b \pi n\tau \cdot \cot_b \pi n\tau \cdot e^{nf(\tau)} \cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

$$f(\tau) = (a+b-bc)2\log 2 + b(\tau+c)\log(\tau+c) + b(-\tau+c)\log(-\tau+c) \\ + (a+b)(\tau-1)\log(\tau-1) - (a+b)(\tau+1)\log(\tau+1),$$

$$g(\tau) = \frac{(\tau+c)^{b/2}(-\tau+c)^{b/2}}{(\tau+1)^{(a+b)/2}(\tau-1)^{(a+b)/2}},$$

and the contour $\mathcal{M}$ is a vertical line $\Re(\tau) = \mu$, $1 < \mu < c$, oriented from bottom to top.

We mean the functions $f(\tau)$ and $g(\tau)$ in the complex τ-plane cut along the rays $(-\infty, 1]$ and $[c, +\infty)$, where we choose that branches of the logarithm functions, which we assume to take real values for $\tau \in (1, c)$.

For each $b \geq 1$ the function $\sin^b z \cdot \cot_b z$ is a polynomial in $\cos z$ with rational coefficients:

$$\sin^b z \cdot \cot_b z = V_b(\cos z), \qquad V_b(-y) = (-1)^b V_b(y), \quad \deg V_b = \max\{1, b-2\};$$

this fact immediately follows from the relations

$$V_1(y) = y, \qquad V_{b+1}(y) = yV_b(y) + \frac{1}{b}(1-y^2)V_b'(y), \quad b = 1, 2, \dots .$$

Consequently, the integral (14) can be represented in the form

$$\tilde{I} = -\sum_{\substack{k=-b \\ k \text{ is odd}}}^{b} c_k J_{n,k}, \tag{15}$$

where $c_k = c_{-k}$ are some (rational) constants satisfying $c_1 = 1$ for $b = 1$, and $c_b = 0$, $c_{b-2} \neq 0$ for $b > 1$;

$$J_{n,\lambda} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{M}} e^{n(f(\tau) - \lambda\pi i\tau)} \cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \overline{J_{n,-\lambda}}, \qquad -b \leq \lambda \leq b, \tag{16}$$

and the overline means the complex conjugation. To calculate asymptotics of the integrals (16), we apply the saddle point method exchanging the contour of integration $\mathcal{M} : \Re(\tau) = \mu$ by a contour $\mathcal{M}_\lambda$, which passes through a (unique) saddle point τ_λ in such a way that the integrand achieves its maximal value at τ_λ. Saddle points in the domain $\Re(\tau) > 0$ can be determined from the equation

$$f'(\tau) = \lambda\pi i, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

It follows easily that the polynomial

$$(\tau+c)^b(\tau-1)^{a+b} - (\tau-c)^b(\tau+1)^{a+b} \tag{18}$$

has at least one real root on the interval $(c, +\infty)$; by μ_1 denote such the root nearest to $\tau = c$.

LEMMA 4. *Suppose the root* $\mu_1 \in (c, +\infty)$ *of the polynomial* (18) *satisfies the condition*

$$\mu_1 \le c + \frac{c^2-1}{4} \cdot \min\left\{\frac{b}{2(a+b)}, \frac{1}{3c}\right\}. \tag{19}$$

Then all solutions of equation (17) *in the domain* $\Re(\tau) > 0$ *are exhausted by the following list*:

(a) *the "real" solution* $\mu_1 \pm i0$ *for* $\lambda = \pm b$, *where a sign '+' (a sign '−') in the record* $\pm i0$ *coinsides with the sign of* λ *and corresponds to upper* (*respectively, lower*) *bank of the cut* $[c, +\infty)$;
(b) *a real solution* $\mu_0 \in (1, c)$ *for* $\lambda = 0$;
(c) *a complex solution* $\tau_\lambda \in (1, c)$ *for* $0 < |\lambda| < b$; *in addition, the sign of* $\Im(\tau_\lambda)$ *coinsides with the sign of* λ, *and* $\tau_\lambda = \overline{\tau_{-\lambda}}$.

The set of solutions of (17) *generates a smooth closed curve*

$$\Re(f'(\tau)) = \log\frac{|\tau+c|^b|\tau-1|^{a+b}}{|\tau-c|^b|\tau+1|^{a+b}} = 0 \tag{20}$$

in the domain $\Re(\tau) > 0$; *this curve is contained between two circles centered at* $\tau = c$ *of radii* $(\mu_1 - c)/2$, $(c - \mu_0)/2$; *there holds* $\Re(f'(\tau)) > 0$ *inside the curve and* $\Re(f'(\tau)) < 0$ *outside it.*

PROOF of the claim leans on a geometric interpretation of the function $\Im(f'(\tau))$ and on a description of all solutions of (17) in the whole cut τ-plane (and not only in the domain $\Re(\tau) > 0$).

With the use of Lemma 4 we choose the countour $\mathcal{M}_\lambda$ to calculate asymptotics of $J_{n,\lambda}$ as $n \to \infty$ in the following way. If $\lambda > 0$ then the countour $\mathcal{M}_\lambda$ consists of the vertical ray $(\mu_0 - i\infty, \mu_0]$, of the segment $[\mu_0, \mu_0 + e^{i\theta}\sqrt{\mu_0^2-1}]$ passing through the saddle point τ_λ, and of the horizontal ray $[\mu_0 + e^{i\theta}\sqrt{\mu_0^2-1}, e^{i\theta}\sqrt{\mu_0^2-1}+\infty]$; in the case $\lambda < 0$ the contour $\mathcal{M}_\lambda$ is symmetric to $\mathcal{M}_{-\lambda}$ with respect to real axis; lastly, the contour $\mathcal{M}_0$ remains the vertical line $(\mu_0 - i\infty, \mu_0 + i\infty)$. This choice of the contour $\mathcal{M}_\lambda$ and an application of Laplace's method (see, e.g., [B], § 5.7) yield the following claim.

LEMMA 5. *Let* $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \le b$, *and let* τ_λ *be the* (*unique*) *solution of equation* (17) *in the domain* $\Re(\tau) > 0$. *Then there holds the asymptotic formula*

$$|J_{n,\lambda}| = \frac{e^{n\Re(f_0(\tau_\lambda))}|g(\tau_\lambda)|}{(2\pi n|f''(\tau_\lambda)|)^{1/2}} \cdot \bigl(1 + O(n^{-1})\bigr) \qquad \text{as } n \to \infty,$$

where

$$f_0(\tau) := f(\tau) - f'(\tau)\tau = (a+b-bc)2\log 2 + bc\log(\tau+c) + bc\log(-\tau+c) \\ - (a+b)\log(\tau+1) - (a+b)\log(\tau-1).$$

Lemma 6. *Suppose condition* (19) *is satisfied. Then for the linear forms* (5) *there holds the limit relation*

$$\varkappa := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log|I_n|}{n} = \Re(f_0(\mu)) = \log\frac{2^{2(a+b-bc)}|\mu+c|^{bc}|\mu-c|^{bc}}{|\mu+1|^{a+b}|\mu-1|^{a+b}}, \qquad (21)$$

where μ is a real root (i.e., μ_1) of the polynomial (18) *from the interval $(c,+\infty)$ for $b=1$, or a root of this polynomial in the domain $\Im(\tau)>0$ with a maximal possible part $\Re(\mu)$ for $b>1$. In the case $b=1$ the limit superior in* (21) *can be replaced by the ordinary one.*

Proof. All solutions of (17) in the domain $\Re(\tau)>0$ for odd values $\lambda=k$ are simultaneously roots of the polynomial (18). A routine test shows that condition (19) provides the increase of the function $\Re(f_0(\tau))$ viewed as a function of $\Re(\tau)$ (or, equivalently, as a function of λ) on the curve (20) in the domain $\Re(\tau)>0$, $\Im(\tau)\ge 0$; hence only asymptotics of $J_{n,\pm1}$ if $b=1$ and of $J_{n,\pm(b-2)}$ if $b>1$ influence on asymptotics of the integral (15). The application of Lemmas 5 and 3 yields the desired relation (21).

5. Estimates for coefficients of linear forms. The values $B_{k,j}$, $k=0,\pm1,\dots,\pm n$, $j=0,1,\dots,a-1$, defined in (9) satisfy inequalities

$$|B_{k,j}| \le \bigl(2(a+bc-b)n\bigr)^j \cdot \max_{k=0,\pm1,\dots,\pm n}|B_{k,0}| = \bigl(2(a+bc-b)n\bigr)^j \cdot \frac{(cn)!^{2b}(2n)!^{a+b-bc}}{n!^{2(a+b)}}.$$

Using relations (10) and Stirling's formula, we then get

Lemma 7. *For the coefficients $A_s=A_{s,n}$ of the linear forms* (5) *there holds the estimate*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|A_{s,n}|}{n} \le 2bc\log c + 2(a+b-bc)\log 2,$$
$$s=0 \text{ or } s=b+1,\dots,a+b-1 \text{ is odd.}$$

It is not hard to prove that the integrals

$$\frac{1}{\pi i}\int_{iM-\infty}^{iM+\infty}\Bigl(\frac{\sin\pi t}{\pi}\Bigr)^k R(t)\,dt, \qquad k=2,4,6,\dots,a-1, \qquad (22)$$

passing through a horizontal line $\Im(t)=M$ with arbitrary $M>0$, are linear combinations of coefficients $A_{b+2},\dots,A_{a+b-1}$ of the forms (5). Therefore, an application of asymptotics of the gamma-function in the domain $\Im(t)\ge M_0>0$ (see [B], § 6.5) and of the saddle point method to the integrals (22) makes more precise (insignificantly) the estimate of Lemma 7.

Lemma 8. *Suppose the real root $\mu_1\in(c,+\infty)$ of the polynomial* (18) *satisfies condition* (19), *and let $\eta\in(0,+i\infty)$ be an imaginary root of this polynomial with a minimal possible absolute value. Then for the coefficients $A_s=A_{s,n}$ of the linear forms* (5) *there holds the estimate*

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|A_{s,n}|}{n} \le \Re(f_0(\eta)) = \log\frac{2^{2(a+b-bc)}|\eta+c|^{bc}|\eta-c|^{bc}}{|\eta+1|^{a+b}|\eta-1|^{a+b}},$$
$$s=0 \text{ or } s=b+1,\dots,a+b-1 \text{ is odd;}$$

moreover, in the case $s=a+b-1$ the limit superior can be replaced by the ordinary one and the inequality becomes the equality.

6. Proofs of main results. By Lemmas 1, 6, if $-b\varpi_c+2(a+b-1)+\varkappa<0$ then there exists at least one irrational number among values of $\zeta(s)$, where s is odd and $b<s<a+b$. Taking $a=19$, $b=3$, $c=3$; $a=33$, $b=5$, $c=3$, and $a=47$, $b=7$, $c=3$ respectively for the collections in (1), we deduce Theorem 1. In Theorem 2, to each odd integer $b\ge 1$ we assign $a=7b$, $c=3$; to conclude the proof, it remains to note that a real root of (18) from the interval $(3,+\infty)$ coincides with the root $\mu_1\approx 3.02472$ of the polynomial $(\tau+3)(\tau-1)^8-(\tau-3)(\tau+1)^8$, and $\varkappa+2(a+b-1)-b\varpi_c<\Re(f_0(\mu_1))+16b-b\varpi_3<-0.047\cdot b<0$.

In the case $b=1$ the criterion of linear independence from [N1] in the same way as in [R1] allows us to obtain the lower estimate for the value $\delta(a)$, i.e.,

$$\delta(a)\ge 1-\frac{\varkappa(a,c)+2a-\varpi_c}{2c\log c+2(a-c+1)\log 2+2a-\varpi_c}, \tag{23}$$

where $\varkappa=\varkappa(a,c)$ is defined in (21). Taking $a=145$, $c=21$ and $a=1971$, $c=131$, by (23) we obtain the estimates $\delta(145)\ge 3$, $\delta(1971)\ge 4$; in addition, $\delta(3)=2$ due to [A]. This proves both Theorem 3 and Theorem 4 for $a<24999$. Further, for odd integers $a\ge 20737=12^4+1$ we show stronger than (2) estimate $\delta(a)>\log_{12}a$ or, equivalently,

$$\delta(12^m+1)>m, \qquad m=4,5,6,\dots, \tag{24}$$

choosing $c=2\cdot\lfloor a/(3m^2)\rfloor+1$ for each $a=12^m+1$ in (23). The estimate (24) for $m=4,5,6,7$ is verified by direct calculations; finally, for $m\ge 8$ we use a trivial evaluation of the right-hand side in (23). This completes the proof of Theorem 4.

References

[A] R. Apéry, *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[B] N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1958.

[Ch] G. V. Chudnovsky, *On the method of Thue–Siegel*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 325–382.

[H1] M. Hata, *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), no. 1, 99–125.

[H2] M. Hata, *A new irrationality measure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **92** (2000), no. 1, 47–57.

[He] T. G. Hessami Pilerhood, *Arithmetic properties of values of hypergeometric functions*, Ph. D. thesis, Moscow Univ., Moscow, 1999; *Linear independence of vectors with polylogarithmic coordinates*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.] (1999), no. 6, 54–56.

[N1] Yu. V. Nesterenko, *On the linear independence of numbers*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. [Moscow Univ. Math. Bull.] (1985), no. 1, 46–54.

[N2] Yu. V. Nesterenko, *A few remarks on $\zeta(3)$*, Mat. Zametki [Math. Notes] **59** (1996), no. 6, 865–880.

[RV] G. Rhin, C. Viola, *The group structure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **97** (2001), no. 3, 269–293.

[R1] T. Rivoal, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 4, 267–270; E-print `math.NT/0008051`.

[R2] T. Rivoal, *Irrationnalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Rapport de recherche SDAD no. 2000-9, Univ. de Caen, Caen, 2000.

[R3] T. Rivoal, *Propriétés diophantinnes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse de Doctorat, Univ. de Caen, Caen, 2001; E-print `math.NT/0104221`.

[Z] W. Zudilin, *Irrationality of values of zeta-function at odd integers*, Uspekhi Mat. Nauk [Russian Math. Surveys] **56** (2001), no. 2, 215–216.

Moscow Lomonosov State University
Department of Mechanics and Mathematics
Vorobiovy Gory, Moscow 119899 RUSSIA
E-mail address: `wadim@ips.ras.ru`

УДК 511.3

Об иррациональности значений дзета-функции

В. В. Зудилин

1. Введение. Проблема иррациональности значений дзета-функции $\zeta(s)$ в нечетных точках $s \geqslant 3$ является одной из самых притягательных в теории чисел. Несмотря на обманчивую простоту и более чем двухвековую историю, полученные в этом направлении результаты можно пересчитать на пальцах. Лишь в 1978 г. Апери [A] удалось установить иррациональность $\zeta(3)$, предъявив последовательность "хороших" рациональных приближений для этого числа. В дальнейшем феномен последовательности Апери был неоднократно переосмыслен с точки зрения различных аналитических методов (см. [N2] и цитированную там библиографию); новые подходы позволили усилить результат Апери *количественно* – получить "хорошую" меру иррациональности числа $\zeta(3)$ (последние этапы соревнования в этом направлении – работы [H2], [RV]). Наконец, в 2000 г. Ривоаль [R1] построил линейные формы с рациональными коэффициентами, содержащие значения $\zeta(s)$ только в нечетных точках $s > 1$, и доказал, что *среди чисел* $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \dots$ *имеется бесконечно много иррациональных*; *более точно*, *для размерности* $\delta(a)$ *пространств*, *натянутых над* $\mathbb{Q}$ *на числа* $1, \zeta(3), \zeta(5), \dots, \zeta(a-2), \zeta(a)$, *где* a *нечетно*, *справедлива оценка*

$$\delta(a) \geqslant \frac{\log a}{1+\log 2}\bigl(1+o(1)\bigr) \qquad \text{при } a \to \infty.$$

2. Основные результаты. В настоящей заметке мы обобщаем конструкцию Ривоаля [R1] и доказываем следующие результаты.

Теорема 1. *В каждом числовом наборе*

$$\begin{gathered} \{\zeta(5),\ \zeta(7),\ \zeta(9),\ \zeta(11),\ \zeta(13),\ \zeta(15),\ \zeta(17),\ \zeta(19),\ \zeta(21)\}, \\ \{\zeta(7),\ \zeta(9),\ \dots,\ \zeta(35),\ \zeta(37)\}, \qquad \{\zeta(9),\ \zeta(11),\ \dots,\ \zeta(51),\ \zeta(53)\} \end{gathered} \tag{1}$$

имеется по крайней мере одно иррациональное число.[1]

Теорема 2. *Для каждого нечетного* $b \geqslant 1$ *среди чисел*

$$\zeta(b+2),\ \zeta(b+4),\ \dots,\ \zeta(8b-3),\ \zeta(8b-1)$$

имеется по крайней мере одно иррациональное.

[1] После завершения работы над статьей автору стало известно, что Ривоаль [R3] независимо получил утверждение теоремы 1 для первого из наборов в (1), используя иное обобщение конструкции из [R1].

Теорема 3. *Существуют нечетные $a_1 \leqslant 145$ и $a_2 \leqslant 1971$ такие, что числа $1, \zeta(3), \zeta(a_1), \zeta(a_2)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.*

Теорема 3 усиливает соответствующий результат работы [R2], где установлена линейная независимость чисел $1, \zeta(3), \zeta(a)$ для некоторого нечетного $a \leqslant 169$.

Теорема 4. *Для каждого нечетного $a \geqslant 3$ справедлива абсолютная оценка*

$$\delta(a) > 0.395 \log a > \frac{2}{3} \cdot \frac{\log a}{1+\log 2}. \tag{2}$$

Отметим, что доказательство теорем 1–4 использует вычисление асимптотики с помощью метода перевала (п. 4) и идейно опирается на работы [N2], [He]. Усовершенствование арифметических оценок (знаменателей числовых линейных форм) в духе [H2], [RV], приводимое в п. 3, позволило уточнить оценку снизу для $\delta(a)$ в теоремах 3, 4 при малых значений a. В п. 5 мы получаем не только оценку сверху, но и точную асимптотику коэффициентов линейных форм. Наконец, в п. 6 мы доказываем теоремы 1–4.

Основные результаты этой работы анонсированы в сообщении [Z].

Автор искренне благодарен профессору Ю. В. Нестеренко за постоянное внимание к работе. Настоящая работа выполнена при частичной поддержке фонда INTAS и Российского фонда фундаментальных исследований (грант no. IR-97-1904).

3. Аналитическая конструкция. Зафиксируем положительные нечетные параметры a, b, c, $c \geqslant 3$ и $a > b(c-1)$, и для каждого целого положительного n рассмотрим рациональную функцию

$$\begin{aligned} R(t) = R_n(t) &:= \frac{\bigl((t \pm (n+1)) \cdots (t \pm cn)\bigr)^b}{\bigl(t(t\pm 1)\cdots(t\pm n)\bigr)^a} \cdot (2n)!^{a+b-bc} \\ &= (-1)^n \cdot \left(\frac{\sin \pi t}{\pi}\right)^b \cdot \frac{\Gamma(\pm t + cn + 1)^b \Gamma(t-n)^{a+b}}{\Gamma(t+n+1)^{a+b}} \cdot (2n)!^{a+b-bc}, \end{aligned} \tag{3}$$

где знак '$\pm$' означает, что в произведении участвуют множители, отвечающие как знаку '$+$', так и '$-$'. Поставим в соответствие функции (3) бесконечную сумму

$$I = I_n := \sum_{t=n+1}^{\infty} \frac{1}{(b-1)!} \frac{\mathrm{d}^{b-1} R(t)}{\mathrm{d}t^{b-1}}; \tag{4}$$

ряд в правой части (4) сходится абсолютно, поскольку $R(t) = O(t^{-2})$ при $t \to \infty$. Представляя функцию (3) в виде суммы простейших дробей и используя ее нечетность, заключаем, что

$$I = \sum_{\substack{s \text{ нечетно} \\ b<s<a+b}} A_s \zeta(s) - A_0 \tag{5}$$

(см. (10) далее), где знаменатели рациональных чисел $A_s = A_{s,n}$ растут не быстрее чем экспоненциально (ср. [R1, леммы 1, 5]). Обозначим через D_n наименьшее общее кратное чисел $1, 2, \dots, n$; из асимптотического закона распределения простых чисел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log D_n}{n} = 1.$$

Лемма 1. *Для каждого нечетного $c \geqslant 3$ существует последовательность целых $\Pi_n = \Pi_{n,c} \geqslant 1$, $n = 1, 2, \dots$, такая, что числа $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1} A_{s,n}$ являются целыми и справедливо предельное соотношение*

$$\varpi_c := \lim_{n\to\infty} \frac{\log \Pi_{n,c}}{n} = -\sum_{l=1}^{(c-1)/2} \biggl(2\psi\Bigl(\frac{2l}{c-1}\Bigr) + 2\psi\Bigl(\frac{2l}{c}\Bigr) + \frac{2c-1}{l}\biggr) + 2(c-1)(1-\gamma), \tag{6}$$

где $\gamma \approx 0.57712$ – постоянная Эйлера, а $\psi(x)$ – логарифмическая производная гамма-функции.

Доказательство. Положим

$$\Pi_n = \prod_{\sqrt{(c+1)n} < p \leqslant 2n} p^{\nu_p}, \qquad \text{где} \quad \nu_p = \min_{k=0,\pm1,\dots,\pm n} \biggl\{ \operatorname{ord}_p \frac{(cn+k)!\,(cn-k)!}{(n+k)!^c (n-k)!^c} \biggr\}. \tag{7}$$

Тогда для рациональных функций

$$G(t) = G_n(t) := \frac{(t \pm (n+1)) \cdots (t \pm cn)}{\bigl(t(t\pm1)\cdots(t\pm n)\bigr)^{c-1}}, \qquad H(t) = H_n(t) := \frac{(2n)!}{t(t\pm1)\cdots(t\pm n)}$$

справедливы включения

$$\Pi_n^{-1} \cdot \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \bigl(G(t)(t+k)^{c-1}\bigr)\Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \quad \frac{D_{2n}^j}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \bigl(H(t)(t+k)\bigr)\Big|_{t=-k} \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$
$$k = 0, \pm1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

(доказательство включений (8) для функции $G(t)$ использует обобщение арифметической схемы Никишина–Ривоаля). Записывая исходную функцию (3) в виде $R(t) = G(t)^b H(t)^{a+b-bc}$ и применяя правило Лейбница для дифференцирования произведения, согласно включениям (8) получаем

$$\Pi_n^{-b} D_{2n}^j B_{k,j} \in \mathbb{Z}, \qquad \text{где} \quad B_{k,j} = \frac{1}{j!} \frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}t^j} \bigl(R(t)(t+k)^a\bigr)\Big|_{t=-k}, \tag{9}$$
$$k = 0, \pm1, \dots, \pm n, \quad j = 0, 1, \dots, a-1.$$

Это дает требуемые включения $\Pi_n^{-b} D_{2n}^{a+b-1} A_s \in \mathbb{Z}$, так как

$$A_s = (-1)^{b-1} \binom{s-1}{b-1} \sum_{k=-n}^{n} B_{k,a+b-s-1}, \qquad s \text{ нечетно}, \quad b < s < a+b,$$

$$A_0 = (-1)^{b-1} \sum_{k=-n}^{n} \sum_{l=1}^{k+n} \biggl(\binom{a+b-2}{b-1} \frac{B_{k,0}}{l^{a+b-1}} + \dots + \binom{b}{b-1} \frac{B_{k,a-2}}{l^{b+1}} + \frac{B_{k,a-1}}{l^b} \biggr). \tag{10}$$

Для каждого простого $p > \sqrt{(c+1)n}$ согласно (7) выполнено

$$\nu_p = \min_{|k|\leqslant n} \varphi_c\biggl(\frac{n}{p}, \frac{k}{p}\biggr),$$

где функция $\varphi_c(x,y) = \lfloor cx+y\rfloor + \lfloor cx-y\rfloor - c\lfloor x+y\rfloor - c\lfloor x-y\rfloor$ периодична (с периодом 1) по каждому аргументу, $\lfloor\,\cdot\,\rfloor$ – целая часть числа. Проверка показывает, что

$$\min_{y\in\mathbb{R}} \varphi_c(x,y) = \begin{cases} 2l-2, & \text{если } x-\lfloor x\rfloor \in \biggl[\dfrac{l-1}{c-1}, \dfrac{l}{c}\biggr) \cup \biggl[\dfrac12 + \dfrac{l-1}{c-1}, \dfrac12 + \dfrac{l}{c}\biggr), \\[2mm] 2l-1, & \text{если } x-\lfloor x\rfloor \in \biggl[\dfrac{l}{c}, \dfrac{l}{c-1}\biggr) \cup \biggl[\dfrac12 + \dfrac{l}{c}, \dfrac12 + \dfrac{l}{c-1}\biggr), \end{cases}$$

$$l = 1, 2, \dots, \frac{c-1}{2};$$

отсюда с помощью асимптотического закона распределения простых чисел и рассуждений из [Ch, теорема 4.3 и § 6], [H1, лемма 3.2] получаем предельное соотношение (6). Лемма доказана.

Несложно убедиться в том, что величина ϖ_c в (6) при $c\to\infty$ имеет порядок $2c(1-\gamma) + O(\log c)$.

4. Асимптотика линейных форм. Определим функции

$$\operatorname{ctg}_b z = \frac{(-1)^{b-1}}{(b-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{b-1}\operatorname{ctg} z}{\mathrm{d}z^{b-1}}, \qquad b = 1, 2, \dots .$$

Разложение $\pi\operatorname{ctg}\pi t$ в сумму простейших дробей показывает, что для любого целого $b\geqslant 1$ в окрестности точки $t = k\in\mathbb{Z}$ справедливо представление

$$\pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t = \frac{1}{(t-k)^b} + O(1). \tag{11}$$

Лемма 2. *Для величины* (4) *справедливо интегральное представление*

$$I = -\frac{1}{2\pi i}\int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t\cdot R(t)\,\mathrm{d}t, \tag{12}$$

где $M\in\mathbb{R}$ – произвольная постоянная из интервала $n<M<cn$.

Доказательство. Рассмотрим подынтегральную функцию в (12) на контуре прямоугольника $\mathcal{P}$ с вершинами $M\pm iN$, $N+\frac12\pm iN$, где целое число N достаточно велико, $N>cn$. Раскладывая функцию (3) в ряд Тейлора в окрестности $t=k\in\mathbb{Z}$ и пользуясь представлением (11), согласно интегральной теореме Коши получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{P}} \pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t\cdot R(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{M<k\leqslant N} \operatorname{Res}_{t=k}\bigl(\pi^b \operatorname{ctg}_b \pi t\cdot R(t)\bigr) = \sum_{M<k\leqslant N} \frac{R^{(b-1)}(k)}{(b-1)!}. \tag{13}$$

На сторонах $[N+\frac12-iN, N+\frac12+iN]$, $[M-iN, N+\frac12-iN]$ и $[N+\frac12+iN, M+iN]$ прямоугольника $\mathcal{P}$ выполнено $R(t) = O(N^{-2})$ и функция $\operatorname{ctg}_b\pi t$, являющаяся многочленом от $\operatorname{ctg}\pi t$, ограничена. Поэтому предельный переход $N\to\infty$ в (13) приводит к (12).

Следующее утверждение получается из леммы 2 после замены $t = n\tau$ и применения к гамма-множителям функции (3) формулы Стирлинга.

Лемма 3. *При $n \to \infty$ для суммы (4) выполнено*

$$I = \tilde{I} \cdot \frac{(-1)^n (2\sqrt{\pi n}\,)^{a+b-bc}(2\pi)^b}{n^{a-1}} \cdot \bigl(1 + O(n^{-1})\bigr),$$

где

$$\tilde{I} = \tilde{I}_n := -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{M}} \sin^b \pi n\tau \cdot \operatorname{ctg}_b \pi n\tau \cdot e^{nf(\tau)} \cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \tag{14}$$

$$f(\tau) = (a+b-bc)2\log 2 + b(\tau+c)\log(\tau+c) + b(-\tau+c)\log(-\tau+c)$$
$$+ (a+b)(\tau-1)\log(\tau-1) - (a+b)(\tau+1)\log(\tau+1),$$

$$g(\tau) = \frac{(\tau+c)^{b/2}(-\tau+c)^{b/2}}{(\tau+1)^{(a+b)/2}(\tau-1)^{(a+b)/2}},$$

а контур $\mathcal{M}$ – вертикальная прямая $\operatorname{Re}\tau = \mu$, $1 < \mu < c$, проходимая снизу вверх.

Мы рассматриваем функции $f(\tau)$ и $g(\tau)$ в τ-плоскости с разрезами вдоль лучей $(-\infty, 1]$ и $[c, +\infty)$, фиксируя ветви логарифмов, принимающие действительные значения на интервале $(1, c)$ вещественной оси.

Для каждого $b \geqslant 1$ функция $\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z$ является многочленом от $\cos z$ с рациональными коэффициентами:

$$\sin^b z \cdot \operatorname{ctg}_b z = V_b(\cos z), \qquad V_b(-y) = (-1)^b V_b(y), \quad \deg V_b = \max\{1, b-2\};$$

этот факт следует из соотношений

$$V_1(y) = y, \qquad V_{b+1}(y) = yV_b(y) + \frac{1}{b}(1-y^2)V_b'(y), \quad b = 1, 2, \dots .$$

Поэтому интеграл (14) можно представить в виде

$$\tilde{I} = -\sum_{\substack{k=-b \\ k \text{ нечетно}}}^{b} c_k J_{n,k}, \tag{15}$$

где $c_k = c_{-k}$ – некоторые (рациональные) постоянные, причем $c_1 = 1$ для $b = 1$ и $c_b = 0$, $c_{b-2} \neq 0$ для $b > 1$,

$$J_{n,\lambda} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{M}} e^{n(f(\tau) - \lambda\pi i\tau)} \cdot g(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \overline{J_{n,-\lambda}}, \qquad -b \leqslant \lambda \leqslant b, \tag{16}$$

черта сверху означает комплексное сопряжение. Для вычисления асимптотики интегралов (16) мы воспользуемся методом перевала, заменяя контур интегрирования $\mathcal{M} : \operatorname{Re}\tau = \mu$ на контур $\mathcal{M}_\lambda$, проходящий через (единственную) точку перевала τ_λ, в которой подынтегральная функция принимает максимальное значение. Точки перевала в области $\operatorname{Re}\tau > 0$ удовлетворяют уравнению

$$f'(\tau) = \lambda\pi i, \qquad \lambda \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Как несложно заметить, многочлен

$$(\tau+c)^b(\tau-1)^{a+b} - (\tau-c)^b(\tau+1)^{a+b} \tag{18}$$

имеет по крайней мере один вещественный корень на интервале $(c, +\infty)$; обозначим через μ_1 ближайший из этих корней к точке $\tau = c$.

Лемма 4. *Пусть корень* $\mu_1 \in (c, +\infty)$ *многочлена* (18) *удовлетворяет неравенству*

$$\mu_1 \leqslant c + \frac{c^2-1}{4} \cdot \min\left\{\frac{b}{2(a+b)}, \frac{1}{3c}\right\}. \tag{19}$$

Тогда в области $\operatorname{Re}\tau > 0$ *все решения уравнения* (17) *исчерпываются следующим списком*:

а) *"вещественное" решение* $\mu_1 \pm i0$ *для* $\lambda = \pm b$, *где знак '+' (знак '−') в записи* $\pm i0$ *совпадает со зна́ком* λ *и отвечает верхнему (нижнему) берегу разреза* $[c, +\infty)$;

б) *вещественное решение* $\mu_0 \in (1, c)$ *для* $\lambda = 0$;

в) *комплексное решение* $\tau_\lambda \in (1, c)$ *для* $0 < |\lambda| < b$, *при этом знак* $\operatorname{Im}\tau_\lambda$ *совпадает со зна́ком* λ *и* $\tau_\lambda = \overline{\tau_{-\lambda}}$.

Множество решений уравнения (17) *образуют в полуплоскости* $\operatorname{Re}\tau > 0$ *гладкую замкнутую кривую*

$$\operatorname{Re} f'(\tau) = \log \frac{|\tau + c|^b |\tau - 1|^{a+b}}{|\tau - c|^b |\tau + 1|^{a+b}} = 0, \tag{20}$$

заключенную внутри окружностей с центром в точке $\tau = c$ *и радиусами* $(\mu_1 - c)/2$, $(c - \mu_0)/2$; *внутри этой кривой* $\operatorname{Re} f'(\tau) > 0$ *и вне ее* $\operatorname{Re} f'(\tau) < 0$.

Доказательство этого утверждения опирается на геометрическую интерпретацию функции $\operatorname{Im} f'(\tau)$ и описание решений уравнения (17) во всей τ-плоскости (а не только в области $\operatorname{Re}\tau > 0$).

С помощью леммы 4 для вычисления асимптотики $J_{n,\lambda}$ при $n \to \infty$ мы выбираем контур $\mathcal{M}_\lambda$, состоящий в случае $\lambda > 0$ из вертикального луча $(\mu_0 - i\infty, \mu_0]$, отрезка $[\mu_0, \mu_0 + e^{i\theta}\sqrt{\mu_0^2 - 1}\,]$, проходящего через точку перевала τ_λ, и горизонтального луча $[\mu_0 + e^{i\theta}\sqrt{\mu_0^2-1}, e^{i\theta}\sqrt{\mu_0^2-1} + \infty]$; в случае $\lambda < 0$ контур $\mathcal{M}_\lambda$ симметричен $\mathcal{M}_{-\lambda}$ относительно вещественной оси; наконец, контур $\mathcal{M}_0$ есть вертикальная прямая $(\mu_0 - i\infty, \mu_0 + i\infty)$. Такой выбор контура $\mathcal{M}_\lambda$ и применение метода Лапласа (см., например, [В, § 5.7]) приводит к следующему утверждению.

Лемма 5. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \leqslant b$, *и* τ_λ – *(единственное) решение уравнения* (17) *в области* $\operatorname{Re}\tau > 0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедлива асимптотическая формула*

$$|J_{n,\lambda}| = \frac{e^{n \operatorname{Re} f_0(\tau_\lambda)} |g(\tau_\lambda)|}{(2\pi n |f''(\tau_\lambda)|)^{1/2}} \cdot \bigl(1 + O(n^{-1})\bigr),$$

где

$$\begin{aligned} f_0(\tau) := f(\tau) - f'(\tau)\tau = (a + b - bc) 2\log 2 + bc\log(\tau + c) + bc\log(-\tau + c) \\ - (a+b)\log(\tau+1) - (a+b)\log(\tau - 1). \end{aligned}$$

Лемма 6. *Пусть выполнено условие* (19). *Тогда для линейных форм* (5) *справедливо предельное соотношение*

$$\varkappa := \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|I_n|}{n} = \operatorname{Re} f_0(\mu) = \log \frac{2^{2(a+b-bc)}|\mu+c|^{bc}|\mu-c|^{bc}}{|\mu+1|^{a+b}|\mu-1|^{a+b}}, \tag{21}$$

где μ – *вещественный корень* μ_1 *многочлена* (18) *из интервала* $(c,+\infty)$ *в случае* $b=1$ *и корень этого многочлена в области* $\operatorname{Im}\tau>0$ *с максимально возможной частью* $\operatorname{Re}\mu$ *в случае* $b>1$. *Для* $b=1$ *верхний предел в* (21) *можно заменить на обычный.*

Доказательство. Все решения уравнения (17) в области $\operatorname{Re}\tau>0$ для нечетных $\lambda=k$ одновременно являются корнями многочлена (18). Рутинная проверка показывает, что условие (19) обеспечивает возрастание функции $\operatorname{Re} f_0(\tau)$ как функции от $\operatorname{Re}\tau$ (или, что то же самое, от λ) на кривой (20) в области $\operatorname{Re}\tau>0$, $\operatorname{Im}\tau\geqslant 0$; поэтому на асимптотику интеграла (15) влияют только $J_{n,\pm1}$ в случае $b=1$ и $J_{n,\pm(b-2)}$ в случае $b>1$. Применение лемм 5 и 3 приводит к требуемому соотношению (21).

5. Оценки коэффициентов линейных форм. Для величин $B_{k,j}$, $k=0,\pm1,\dots,\pm n$, $j=0,1,\dots,a-1$, определенных в (9), справедливы оценки

$$|B_{k,j}| \leqslant \bigl(2(a+bc-b)n\bigr)^j \cdot \max_{k=0,\pm1,\dots,\pm n} |B_{k,0}| = \bigl(2(a+bc-b)n\bigr)^j \cdot \frac{(cn)!^{2b}(2n)!^{a+b-bc}}{n!^{2(a+b)}}.$$

Пользуясь соотношениями (10) и формулой Стирлинга, получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Для коэффициентов* $A_s=A_{s,n}$ *линейных форм* (5) *справедлива оценка*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|A_{s,n}|}{n} \leqslant 2bc\log c + 2(a+b-bc)\log 2,$$

$s=0$ *или* $s=b+1,\dots,a+b-1$ *нечетно.*

Как несложно показать, интегралы

$$\frac{1}{\pi i}\int_{iM-\infty}^{iM+\infty} \left(\frac{\sin\pi t}{\pi}\right)^k R(t)\,dt, \qquad k=2,4,6,\dots,a-1, \tag{22}$$

вдоль горизонтальной прямой $\operatorname{Im} t = M$, где $M>0$ произвольно, являются линейными комбинациями коэффициентов $A_{b+2},\dots,A_{a+b-1}$ форм (5). Поэтому применение асимптотики гамма-функции в области $\operatorname{Im} t\geqslant M_0>0$ (см. [B, §6.5]) и метода перевала к интегралам (22) уточняет (незначительно) оценку леммы 7.

Лемма 8. *Пусть вещественный корень* $\mu_1\in(c,+\infty)$ *многочлена* (18) *удовлетворяет условию* (19) *и* $\eta\in(0,+i\infty)$ – *минимальный по абсолютной величине мнимый корень этого многочлена. Тогда для коэффициентов* $A_s=A_{s,n}$ *линейных форм* (5) *справедлива оценка*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log|A_{s,n}|}{n} \leqslant \operatorname{Re} f_0(\eta) = \log \frac{2^{2(a+b-bc)}|\eta+c|^{bc}|\eta-c|^{bc}}{|\eta+1|^{a+b}|\eta-1|^{a+b}},$$

$s=0$ *или* $s=b+1,\dots,a+b-1$ *нечетно,*

причем в случае $s=a+b-1$ *верхний предел можно заменить на обычный и неравенство превращается в равенство.*

6. Доказательство основных результатов. Согласно леммам 1, 6 в случае $-b\varpi_c+2(a+b-1)+\varkappa<0$ среди чисел $\zeta(s)$, где s нечетно и $b<s<a+b$, имеется по крайней мере одно иррациональное. Выбирая $a=19$, $b=3$, $c=3$; $a=33$, $b=5$, $c=3$ и $a=47$, $b=7$, $c=3$ соответственно для каждого из наборов в (1), получаем теорему 1. В теореме 2 для каждого нечетного $b\geqslant 1$ полагаем $a=7b$, $c=3$; при этом корень многочлена (18) на интервале $(3,+\infty)$ совпадает с корнем $\mu_1\approx 3.02472$ многочлена $(\tau+3)(\tau-1)^8-(\tau-3)(\tau+1)^8$ и $\varkappa+2(a+b-1)-b\varpi_c<\operatorname{Re} f_0(\mu_1)+16b-b\varpi_3<-0.047\cdot b<0$.

В случае $b=1$ критерий линейной независимости из [N1] так же, как и в [R1], позволяет оценить величину $\delta(a)$ снизу:

$$\delta(a)\geqslant 1-\frac{\varkappa(a,c)+2a-\varpi_c}{2c\log c+2(a-c+1)\log 2+2a-\varpi_c}, \tag{23}$$

где величина $\varkappa=\varkappa(a,c)$ задается соотношением (21). Полагая $a=145$, $c=21$ и $a=1971$, $c=131$, согласно (23) получаем оценки $\delta(145)\geqslant 3$, $\delta(1971)\geqslant 4$; кроме того, $\delta(3)=2$ ввиду [A]. Это доказывает как теорему 3, так и теорему 4 для $a<24999$. Для нечетных $a\geqslant 20737=12^4+1$ мы доказываем более сильную, чем (2), оценку $\delta(a)>\log_{12}a$ или, что то же самое,

$$\delta(12^m+1)>m, \qquad m=4,5,6,\dots, \tag{24}$$

выбирая $c=2\cdot\lfloor a/(3m^2)\rfloor+1$ для каждого $a=12^m+1$ в (23). При $m=4,5,6,7$ оценка (24) проверяется непосредственно; при $m\geqslant 8$ мы пользуемся тривиальной оценкой правой части в (23). Это завершает доказательство теоремы 4.

Список литературы

[A] Apéry R., *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$*, Astérisque **61** (1979), 11–13.

[B] де Брёйн Н. Г., *Асимптотические методы в анализе*, М.: ИЛ, 1961.

[Ch] Chudnovsky G. V., *On the method of Thue–Siegel*, Ann. of Math. (2) **117** (1983), no. 2, 325–382.

[H1] Hata M., *Legendre type polynomials and irrationality measures*, J. Reine Angew. Math. **407** (1990), no. 1, 99–125.

[H2] Hata M., *A new irrationality measure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **92** (2000), no. 1, 47–57.

[He] Хессами Пилеруд Т. Г., *Арифметические свойства значений гипергеометрических функций*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук, М.: МГУ, 1999; *О линейной независимости векторов с полилогарифмическими координатами*, Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. (1999), no. 6, 54–56.

[N1] Нестеренко Ю. В., *О линейной независимости чисел*, Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. (1985), no. 1, 46–54.

[N2] Нестеренко Ю. В., *Некоторые замечания о $\zeta(3)$*, Матем. заметки **59** (1996), no. 6, 865–880.

[RV] Rhin G., Viola C., *The group structure for $\zeta(3)$*, Acta Arith. **97** (2001), no. 3, 269–293.

[R1] Rivoal T., *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **331** (2000), no. 4, 267–270; E-print `math.NT/0008051`.

[R2] Rivoal T., *Irrationnalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs*, Rapport de recherche SDAD no. 2000-9, Univ. de Caen, 2000.

[R3] Rivoal T., *Propriétés diophantinnes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs*, Thèse de Doctorat, Univ. de Caen, 2001; E-print `math.NT/0104221`.

[Z] Зудилин В. В., *Об иррациональности значений дзета-функции в нечетных точках*, Успехи матем. наук **56** (2001), no. 2, 215–216.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: `wadim@ips.ras.ru`